Сайт элементарной математики
Дмитрия Гущина
www.mathnet.spb.ru

Гущин Д. Д.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАНИЯ B7: ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Проверяемые элементы содержания и виды деятельности: умение выполнять действия с обыкновенными и десятичными дробями; знание формул сокращенного умножения, умение выполнять действия с алгебраическими дробями; владение понятием степени с рациональным показателем, умение выполнять тождественные преобразования и находить значение выражений, содержащих степени с рациональным показателем; владение понятием арифметический корень, знание свойств арифметических корней, умение выполнять тождественные преобразования с арифметическими корнями и находить их значения; владение понятием логарифм, знание основных свойств логарифмов, умение выполнять тождественные преобразования логарифмических выражений; знания основных соотношений между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента, формул сложения, формул приведения, формул двойного аргумента, знание табличных значений тригонометрических функций, умение применять указанные знания при вычислениях и тождественных преобразованиях тригонометрических выражений.

Ориентировочное время выполнения учащимися: 2—10 минут.

Типы заданий:

- Преобразования рациональных выражений
- Преобразования степенных выражений
- Преобразования иррациональных выражений
- Преобразования логарифмических выражений
- Преобразования тригонометрических выражений
- Вычисление значений тригонометрических выражений

Преобразования рациональных выражений

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Сложение и вычитание дробей. Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители, а знаменатель оставить без изменений. Чтобы вычесть две дроби с одинаковыми знаменателями, надо из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить без изменений. Чтобы сложить или вычесть две дроби с разными знаменателями, необходимо сначала привести дроби к общему знаменателю.

Умножение дробей. Чтобы умножить две дроби, надо перемножить их числители, перемножить их знаменатели, и разделить первое произведение на второе.

Деление дробей. Чтобы разделить дробь на дробь, надо умножить первую дробь на дробь, обратную второй.

Возведение дроби в степень. Чтобы возвести дробь в степень, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель, и разделить степень числителя на степень знаменателя.

Формулы сокращенного умножения:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2,\qquad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),\qquad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

ВНИМАНИЕ: ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

Задания на действия с числовыми и алгебраическими дробями вполне привычны из курса математики 5—6 классов и алгебры 7 класса. Напомним только, что при выполнении действий с дробями разных типов обычно бывает удобно переводить десятичные дроби в обыкновенные, а смешанные — в неправильные.

Преобразования степенных выражений

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Степень. Пусть дано положительное число a и произвольное действительное число n. Число a^n называется *степенью*, число a — *основанием степени*, число n — *показателем степени*.

Напомним, что по определению полагают:

$$a^1 = a, \qquad a^0 = 1, \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x},\ x \in \mathbb{R}.$$

Степень с дробным показателем. Если a — положительное число, m — целое число, а n — натуральное число и $n \geq 2$, то

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

В частности, например,

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \qquad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \qquad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, \qquad a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3} = (\sqrt[4]{a})^3.$$

Свойства степени. Если a и b — положительные числа, x и y — любые действительные числа, то справедливы следующие свойства:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \qquad a^x : a^y = a^{x-y},$$

$$(a^x)^y = a^{xy}, \qquad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x, \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

ВНИМАНИЕ: ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

При решении многих задач ЕГЭ необходимо установить связь между различными основаниями степени, поэтому будет полезно знать некоторые степени чисел в пределах 1000:

$2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$,
$2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$;
$3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$, $3^6 = 729$;
$4^2 = 16$, $4^3 = 64$, $4^4 = 256$, $4^5 = 1024$;
$5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$;
$6^2 = 36$, $6^3 = 216$;
$7^2 = 49$, $7^3 = 343$;
$8^2 = 64$, $8^3 = 512$;
$9^2 = 81$, $9^3 = 729$;
$10^2 = 100$, $10^3 = 1000$.

Преобразования иррациональных выражений

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Арифметический корень. Пусть n — натуральное число, отличное от единицы, a — неотрицательное число. *Арифметическим корнем* n-й степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Для арифметического корня n-й степени из неотрицательного числа a используется обозначение $\sqrt[n]{a}$. Если $n=2$, пишут $\sqrt{a}$. По определению $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Для любых, в том числе отрицательных, значений a справедлива формула $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$, в частности,

$$\sqrt{a^2} = |a| \qquad \text{и} \qquad \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|.$$

Свойства арифметического корня. Если a и b — неотрицательные числа, n и k — натуральные числа, отличные от единицы, m —целое число, то имеют место следующие соотношения:

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}, \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b\neq 0,$$

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}, \qquad \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{k+n}}, \qquad \sqrt[n]{a}:\sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{k-n}}.$$

Степень с дробным показателем. Если a — положительное число, m — целое число, а n — натуральное число и $n \geq 2$, то

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

ВНИМАНИЕ: ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

Напомним, что при извлечении корня обычно бывает удобно перевести десятичную дробь в обыкновенную, а смешанную — в неправильную.

Преобразования числовых логарифмических выражений

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Определение логарифма. Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a>0$, $a\neq 1$) называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b. Для логарифма положительного числа b по основанию a ($a>0$, $a\neq 1$) используется обозначение $\log_a b$.

По определению

$$a^{\log_a b} = b,$$

это равенство называется *основным логарифмическим тождеством*.

Частные случаи:

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1, \qquad \log_a a^n = n.$$

Логарифм положительного числа b по основанию 10 называется десятичным логарифмом и обозначается $\lg b$.

Логарифм положительного числа b по основанию e называется натуральным логарифмом и обозначается $\ln b$.

Свойства логарифмов. Если $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq 1$, $x>0$, $y>0$, $m\neq 0$, n — любое действительное число, то справедливы следующие свойства:

$$\log_a x+\log_a y=\log_a(xy),\qquad \log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y},$$

$$\log_{a^m} x^n=\frac{n}{m}\log_a x,\qquad \log_{a^m} a^n=\frac{n}{m},$$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},\qquad \log_a c=\frac{1}{\log_c a},$$

$$\log_a x\cdot\log_c y=\log_a y\cdot\log_c x.$$

ВНИМАНИЕ: ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

Большая часть заданий, включенных в ЕГЭ 2012 года, представляет собой задачи на вычисление значений числовых логарифмических выражений. Задания на преобразования буквенных выражений представлены всего тремя прототипами. При подготовке следует обратить особое внимание на три последние формулы — формулу перехода к новому основанию логарифма и следствия из нее: задачи на использование этих формул в школьных учебниках практически не встречаются.

Вычисление значений тригонометрических выражений

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Основные формулы тригонометрии:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\qquad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta,\qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\qquad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,\qquad \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Правило для запоминания формул приведения. Чтобы записать формулу приведения для аргументов $0{,}5\pi\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $1{,}5\pi\pm\alpha$ необходимо: 1) определить *четверть*, в которой лежит аргумент приводимой функции, предполагая α острым углом; 2) определить *знак* приводимой функции в этой четверти; 3) определить *вид функции,* не меняя ее названия для аргументов $\pi\pm\alpha$, и изменяя функцию на кофункцию для аргументов $0{,}5\pi\pm\alpha$, $1{,}5\pi\pm\alpha$. А именно:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha,\qquad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\qquad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=-\cos\alpha,\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha,\qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha,\qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\ \pi-\alpha\ =-\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Свойства четности и нечетности функций:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha, \qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Табличные значения тригонометрических функций

$\sin 0=0$,	$\cos 0=1$,	$\operatorname{tg} 0=0$,	$\operatorname{ctg} 0$ не существует,
$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,	$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,	$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$,
$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,	$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$,	$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1$,
$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,	$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$,	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,	$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,
$\sin\frac{\pi}{2}=1$,	$\cos\frac{\pi}{2}=0$,	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не существует,	$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0$.

ВНИМАНИЕ: ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

Большая часть заданий, включенных в ЕГЭ 2012 года, представляет собой задачи на вычисление значений числовых тригонометрических выражений с применением формул двойных углов и формул приведения. При этом наиболее часто используются следующие следствия из формул приведения: если $\alpha+\beta=90°$, то $\sin\alpha=\cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta$, а если $\alpha+\beta=180°$, то синусы углов α и β равны, а их косинусы, тангенсы и котангенсы противоположны.