ФДП

МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2012

Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней (типовые задания С1)

Прокофьев А.А., ***Корянов А.Г.***

Прокофьев А.А. – доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики №1 НИУ МИЭТ, учитель математики ГОУ лицей №1557 г. Зеленограда; e-mail: aaprokof@yandex.ru

Корянов А.Г. – методист по математике городского информационно-методического Центра (ГИМЦ) г. Брянска, учитель математики МОУ лицей №27 г. Брянска; e-mail: akoryanov@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Прежде чем перейти к рассмотрению тригонометрических уравнений, остановимся на некоторых важных вопросах, имеющих непосредственное отношение к решению этих уравнений.

Формулы записи решений простейших тригонометрических уравнений

В большинстве учебников для записи решений простейших уравнений используются следующие формулы:

Вид уравнения	Общая формула решений
$\sin x = a$, $\vert a\vert \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$
$\cos x = a$, $\vert a\vert \le 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$
$\mathrm{tg} x = a$	$x = \mathrm{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$
$\mathrm{ctg} x = a$	$x = \mathrm{arcctg} a + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$

При повторении формул решения уравнений следует обратить внимание на то, что формулы задают множества чисел, которые образованы по закону арифметической прогрессии с разностью 2π или π. С другой стороны использование общей формулы серий решений не всегда является удобной при отборе корней, в частности, на числовой окружности. В этом случае как раз удобнее не объединять серии решений тригонометрических уравнений, а представлять их совокупностью, выделяя разность 2π соответствующих прогрессий.

1. Решения уравнения $\sin x = a$ $(-1 < a < 1)$ можно записать совокупностью двух серий решений

$$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi n, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Уравнения $\sin x = 1$ и $\sin x = -1$ имеют решения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, и $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, соответственно.

2. Решения уравнения $\cos x = a$ $(-1 < a < 1)$ можно записать совокупностью двух серий решений

$$x = \left[\begin{array}{l} \arccos a + 2\pi n, \\ -\arccos a + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Уравнения $\cos x = 1$ и $\cos x = -1$ имеют решения $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ и $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ соответственно.

3. Решения уравнения $\mathrm{tg} x = a$ можно записать совокупностью двух серий

$$x = \left[\begin{array}{l} \mathrm{arctg} a + 2\pi n, \\ \pi + \mathrm{arctg} a + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbf{Z}.$$

4. Решения уравнения $\mathrm{ctg} x = a$ можно записать совокупностью двух серий

$$x = \left[\begin{array}{l} \mathrm{arcctg} a + 2\pi n, \\ \pi + \mathrm{arcctg} a + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Числовая окружность

Числовая (или координатная) окружность активно применяется в преподавании тригонометрии, с ее помощью легко демонстрировать множества чисел, объединенных по определенным свойствам. Поэтому рассмотрение примеров в данном пособии будет в основном связано с координатной окружностью. В тех случаях, где затруднительно использовать числовую окружность, для отбора корней тригонометрического уравнения применяют координатную прямую.

Числовой (*координатной*) *окружностью* называют окружность единичного радиуса, на которой выбраны:

а) начало отсчета;

б) положительное направление (против часовой стрелки);

в) единица измерения (радиус $r=1$).

Отображение числового множества **R** на координатную окружность наглядно можно представить как «наматывание» координатной прямой на координатную окружность: положительный луч координатной прямой – в положительном направлении, отрицательный луч – в отрицательном направлении (см. рис. 1).

Отметим, что отображение числового множества **R** на координатную окружность не является взаимно однозначным: каждая точка окружности изображает бесконечное множество действительных чисел, каждому действительному числу соответствует единственная точка окружности.

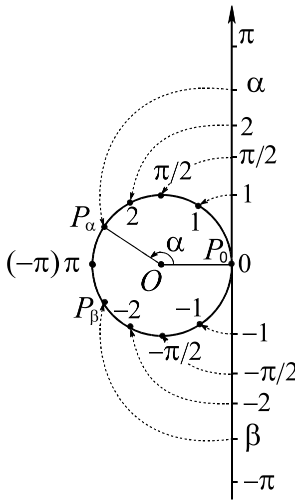

Рис. 1

Геометрическая иллюстрация решения простейших тригонометрических уравнений

Все числа вида $\alpha+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$ соответствуют единственной точке числовой окружности P_α, так как при обходе окружности в положительном или отрицательном направлении на целое число оборотов из данной точки P_α приходим в эту же точку.

уравнения вида $\sin x=a$

Числа вида $\alpha+2\pi n$ или $-\alpha+\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ на числовой окружности изображаются точкой P_α или $P_{-\alpha+\pi}$ соответственно. Эти точки расположены на окружности симметрично относительно оси y. Эти два множества чисел можно записать в виде $(-1)^n\alpha+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 1. *Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения* $\sin x=\dfrac{\sqrt2}{2}$.

Решение. Запишем решения данного уравнения $x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$ или $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Две точки на окружности $P_{\frac{\pi}{4}}$ и $P_{\frac{3\pi}{4}}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно оси ординат (см. рис. 2).

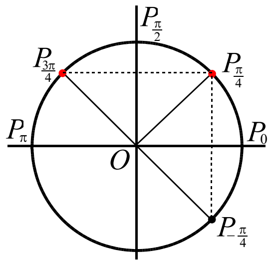

Рис. 2

уравнения вида $\cos x=a$

Числа вида $\alpha+2\pi n$ или $-\alpha+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, на числовой окружности изображаются точкой P_α или $P_{-\alpha}$ соответственно. Точки расположены на окружности симметрично относительно оси x. Эти два множества чисел можно записать в виде $\pm\alpha+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 2. *Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения* $\cos x=\dfrac{\sqrt3}{2}$.

Решение. Запишем решения данного уравнения $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$ или $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Две точки на окружности $P_{\frac{\pi}{6}}$ и $P_{-\frac{\pi}{6}}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно оси абсцисс (см. рис. 3).

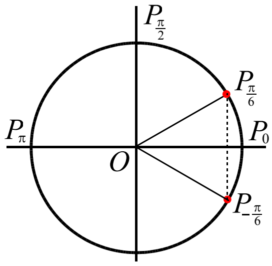

Рис. 3

уравнения вида $\mathrm{tg}x = a$ или $\mathrm{ctg}x = a$

Числа вида $\alpha + 2\pi n$ или $\alpha + \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, на числовой окружности изображаются точками P_α или $P_{\alpha+\pi}$. Точки расположены на окружности симметрично относительно начала координат. Эти два множества чисел можно записать в виде $\alpha + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Пример 3. *Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения* $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$**.**

Решение. Запишем решения данного уравнения $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ или $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Две точки на окружности $P_{\frac{\pi}{3}}$ и $P_{\frac{4\pi}{3}}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно начала координат (см. рис. 4).

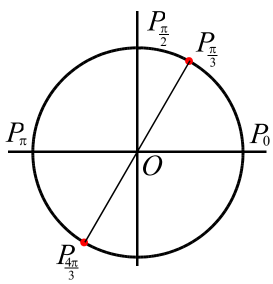

Рис. 4

Пример 4. *Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения* $\mathrm{ctg}x = \sqrt{3}$**.**

Решение. Запишем решения данного уравнения $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Точки на окружности $P_{\frac{\pi}{6}}$ и $P_{\frac{7\pi}{6}}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно начала координат (см. рис. 5).

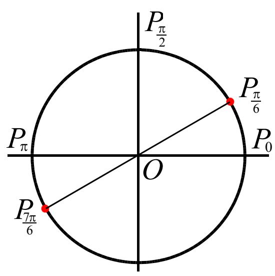

Рис. 5

уравнения вида $T(\alpha x) = a$

Для уравнений вида $T(\alpha x) = a$, где через T обозначена одна из простейших тригонометрических функций, изображение решений уравнения связано с точками-вершинами правильного многоугольника.

Числам вида $\alpha + \frac{2\pi n}{k}$, $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \{3;\ 4;\ 5;\ \ldots\}$ на числовой окружности соответствуют вершины правильного k-угольника, вписанного в окружность.

Случаи $k = 1$ и $k = 2$ рассмотрены выше. При $k = 1$ получаем единственную точку на окружности, а при $k = 2$ – две диаметрально противоположные точки окружности.

Пример 5. *Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения* $\sin 3x = 1$.

Решение. Решениями данного уравнения являются числа вида $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Придавая последовательно значения 0, 1, 2 переменной n, получим три точки (вершины правильного треугольника) на окружности (см. рис. 6), соответствующие числам $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$.

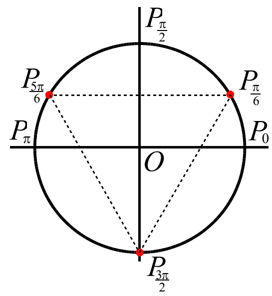

Рис. 6

Тренировочные упражнения

1. Изобразите множество решений уравнения, используя числовую окружность:

а) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; **б)** $\sin x = 0$;

в) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; **г)** $\sin x = 0{,}2$;

д) $\cos x = \frac{1}{2}$; **е)** $\cos x = 0$;

ж) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; **з)** $\cos x = -0{,}4$;

и) $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$; **к)** $\mathrm{tg}x = -\sqrt{3}$;

л) $\mathrm{tg}5x = 0$.

Геометрическая иллюстрация решения простейших тригонометрических неравенств

Основная трудность в отборе решений тригонометрических уравнений ложится на решение тригонометрических неравенств и их изображений на числовой окружности.

неравенства вида $\sin x \vee a$ или $\cos x \vee a$

Напомним алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств вида $\sin x \vee a$ или $\cos x \vee a$, $|a| \le 1$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков неравенств: $>, <, \ge, \le$.

1. Отмечаем на линии синусов (косинусов) число a и все значения синуса (косинуса), которые больше (меньше) числа a.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Если выделенная дуга прошла через 0, то для записи граничных точек выбирают разное направление (одно число положительное, другое – отрицательное). Если выделенная дуга не прошла через 0, то для записи граничных точек выбирают одно направление.

4. Записываем общее решение неравенства, добавляя к концам найденного промежутка число кратное периоду синуса или косинуса.

Сразу отметим, что для отбора решения уравнения нам не потребуется аналитическая запись решения тригонометрического неравенства, и последний шаг алгоритма будем опускать.

Пример 6. *Изобразить на числовой окружности множество решений неравенства* $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. 1. Отмечаем на линии синусов (см. рис. 7) число $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и все значения синуса, которые меньше этого числа.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, ординаты которых меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Выделенная дуга проходит через нуль, поэтому при положительном обходе от нуля получаем первую граничную точку $P_{\frac{\pi}{4}}$, которая соответствует положительному числу $\frac{\pi}{4}$. Делаем обход по дуге от нуля в отрицательном направлении до второй граничной точки $P_{-\frac{5\pi}{4}}$, соответствующей отрицательному числу $-\frac{5\pi}{4}$. Числа из промежутка $\left(-\frac{5\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$, являются решения данного неравенства (см. рис. 7). Все решения данного неравенства будут иметь вид $\left(-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

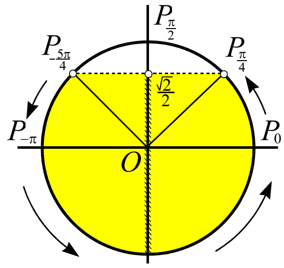

Рис. 7

Пример 7. *Изобразить на числовой окружности множество решений неравенства* $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. 1. Отмечаем на линии косинусов (см. рис. 8) число $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и все значения косинуса, меньшие этого числа.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, абсциссы которых не больше $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Выделенная дуга не проходит через нуль, поэтому первая точка $P_{\frac{\pi}{6}}$ соответствует положительному числу $\frac{\pi}{6}$. Делаем обход по дуге от точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ в положитель-

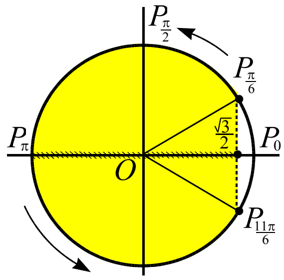

Рис. 8

ном направлении до второй точки $P_{\frac{11\pi}{6}}$, соответствующей числу $\frac{11\pi}{6}$. Числа из промежутка $\left[\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]$, являются решения данного неравенства (см. рис. 8). Все решения данного неравенства будут иметь вид $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{11\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$.

неравенства вида $\mathrm{tg}x\vee a$ или $\mathrm{ctg}x\vee a$

Для решения неравенств с тангенсом и котангенсом удобно использовать линии тангенсов и котангенсов, касающиеся тригонометрической окружности в точках $(1;0)$ и $(0;1)$ соответственно.

Напомним алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств вида $\mathrm{tg}x\vee a$ или $\mathrm{ctg}x\vee a$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков неравенств: $>, <, \geq, \leq$.

1. Отмечаем на линии тангенсов (котангенсов) число a и все значения тангенса (котангенса), которые больше (меньше) числа a.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Записываем ответ для соответствующего неравенства:

а) для неравенства $\mathrm{tg}\,x<a$ решение имеет вид

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n<t<\mathrm{arctg}\,a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z};$$

б) для неравенства $\mathrm{tg}\,x>a$ решение имеет вид

$$\mathrm{arctg}a+\pi n<t<\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z};$$

в) для неравенства $\mathrm{ctg}x<a$ решение имеет вид

$$\mathrm{arcctg}a+\pi n<t<\pi+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z};$$

г) для неравенства $\mathrm{ctg}x>a$ решение имеет вид

$$\pi n<t<\mathrm{arcctg}a+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}.$$

Пример 8. *Изобразить на числовой окружности множество решений неравенства* $\mathrm{tg}x>\sqrt{3}$.

Решение. Отмечаем на линии тангенсов (см. рис. 9) число $\sqrt{3}$ и все значения тангенса, которые больше этого числа.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Выделенная дуга имеет граничную точку $P_{\frac{\pi}{3}}$, соответствующую числу $\frac{\pi}{3}$. Делаем обход по дуге от точки $P_{\frac{\pi}{3}}$ в положительном направлении до второй точки $P_{\frac{\pi}{2}}$, соответствующей числу $\frac{\pi}{2}$. Числа из промежутка $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$, являются решения данного неравенства. Все решения данного неравенства будут иметь вид $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. На окружности (см. рис. 9) выделены два интервала.

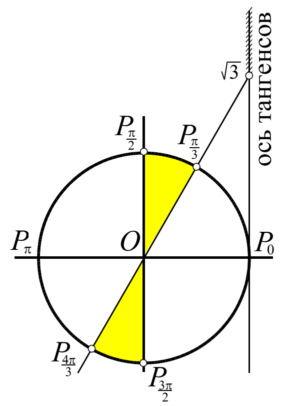

Рис. 9

Пример 9. *Изобразить на числовой окружности множество решений неравенства* $\mathrm{ctg}\,x\leq-1$.

Решение. Отмечаем на линии котангенсов (см. рис. 10) число -1 и все значения котангенса, меньшие этого числа.

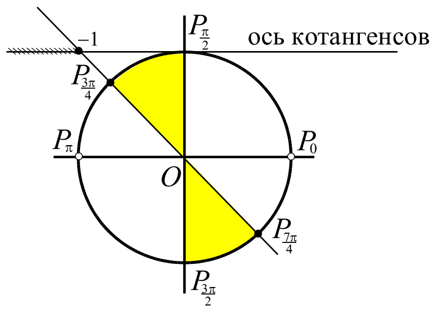

Рис. 10

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Выделенная дуга имеет граничную точку $P_{\frac{3\pi}{4}}$, соответствующую числу $\frac{3\pi}{4}$. Делаем обход по дуге от точки $P_{\frac{3\pi}{4}}$ в положительном направлении до второй точки P_{π}, соответствующей числу π. Числа из промежутка $\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right)$, являются решения данного неравенства. Остальные решения получают добавлением слагаемого $\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$ к концам полученного промежутка. На окружности (см. рис. 10) выделены два промежутка.

Тренировочные упражнения

2. Изобразите множество решений неравенства, используя числовую окружность:

а) $\sin x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$; **б)** $\sin x<0$; **в)** $\sin x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\sin x\ge 0{,}7$; **д)** $\cos x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$; **е)** $\cos x<0$;

ж) $\cos x>-\frac{1}{2}$; **з)** $\mathrm{tg}x>1$; **и)** $\mathrm{tg}x<\frac{1}{\sqrt{3}}$;

к) $\mathrm{tg}x\le-\sqrt{3}$; **л)** $\mathrm{tg}x>0$; **м)** $\mathrm{ctg}x>-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

н) $\mathrm{ctg}x\ge\sqrt{3}$; **о)** $\mathrm{ctg}x<0$.

Проблема отбора корней и способы их отбора

При решении различных уравнений школьникам приходится сталкиваться с понятием «посторонних» корней, появляющихся в результате не равносильных преобразований как отдельных выражений, входящих в уравнение, так и самого уравнения.

Преобразование тригонометрического уравнения может привести не только к равносильному уравнению, но и к уравнению-следствию. Если на каком-то шаге мы перешли к уравнению, про которое точно знаем, что оно – следствие исходного, и при этом не уверенны, что оно равносильно ему, то, найдя корни нового уравнения, необходимо сделать проверку (например, подставив найденные значения в исходное уравнение).

Однако следует иметь в виду, что проверка путем подстановки найденных значений в тригонометрическое уравнение в большинстве случаев сопряжена с техническими трудностями. Если сомнение в равносильности первого и последнего в цепочке преобразований уравнения вызвано расширением в ходе преобразований области допустимых значений, лучше начать решение с записи ограничений, определяющих область допустимых значений исходного уравнения, и, найдя корни последнего уравнения, проверить, удовлетворяют ли они этим ограничениям.

Причиной расширения области допустимых значений тригонометрического уравнения может быть также использование некоторых тригонометрических формул. В первую очередь следует обратить внимание на формулы, выражающие синус, косинус, тангенс или котангенс угла через тангенс половинного угла. Использование этих формул может привести к сужению области допустимых значений и, как следствие, к потере корней. Применение тех же формул в обратном направлении, напротив, может привести к расширению области допустимых значений и, как следствие, к появлению посторонних корней. Сказанное относится также к формулам тангенса суммы и разности аргументов.

Также к приобретению корней может привести использование формул $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\alpha$ или $\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\sin\alpha=\cos\alpha$.

Решение тригонометрических уравнений, связанных с отбором корней, имеет отличие от ситуаций, возникающих при решении дробно-рациональных, иррациональных, логарифмических и других уравнений, состоящее в том, что при решении простейших тригонометрических уравнений получают бесконечные серии решений, зависящих от целочисленного параметра.

При отборе корней в процессе решения тригонометрических уравнений обычно используют один из следующих способов.

● Арифметический способ:

а) непосредственная подстановка полученных корней в уравнение и имеющиеся ограничения;
б) перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней.

● Алгебраический способ:

а) решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней;
б) исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами.

● Геометрический способ:

а) изображение корней на тригонометрической окружности с последующим отбором и учетом имеющихся ограничений;
б) изображение корней на числовой прямой с последующим отбором и учетом имеющихся ограничений.

● Функционально-графический способ:

выбор корней с помощью графика простейшей тригонометрической функции.

Решение уравнений с двумя целочисленными переменными

В случае отбора общих решений нескольких найденных серий решений тригонометрических уравнений приходится решать линейные уравнения с двумя неизвестными вида $an + bm = c$, где $a, b, c \in \mathbf{Z}$ – заданные числа, а $n, m \in \mathbf{Z}$ – искомые неизвестные.

Рассмотрим метод решения в целых числах линейного уравнения с двумя неизвестными.

$$an + bm = c, \qquad (1)$$

где $a, b, c \in \mathbf{Z}$ – заданные числа, а $n, m \in \mathbf{Z}$ – искомые неизвестные

Уравнение (1) имеет решение тогда и только тогда, когда c делится на НОД чисел a и b. Так, например, уравнение $2m + 8n = 17$ не имеет решений в целых числах, так как 17 не делится на 2 (наибольший общий делитель чисел 2 и 8).

Покажем, как ищется решение уравнения (1). Рассмотрим уравнение

$$5n - 8m = 4. \qquad (2)$$

Выбираем неизвестную, коэффициент при которой меньше по абсолютной величине, – в нашем случае это n. Выражаем ее через другую неизвестную

$$n = \frac{8m+4}{5} = m + 1 + \frac{3m-1}{5}.$$

Целые решения уравнения (2) будут существовать, когда число $\frac{3m-1}{5}$ будет целым.
Обозначим его буквой p, тогда

$$\frac{3m-1}{5} = p \text{ или } 3m = 5p + 1.$$

Проделав с последним уравнением те же действия, что и с исходным, получим $m = \frac{5p+1}{3} = p + \frac{2p+1}{3}$. Для существования целых решений число $\frac{2p+1}{3}$ должно быть целым. Обозначим его буквой t, тогда

$$\frac{2p+1}{3} = t \text{ или } 2p = 3t - 1.$$

Отсюда $p = \frac{3t-1}{2} = t + \frac{t-1}{2}$. Последнее равенство возможно в целых числах, если $t = 2k + 1$, $k \in \mathbf{Z}$.

Теперь, чтобы получить решение уравнения (2), нужно выразить p, m и n через k. Выполняя соответствующие подстановки, имеем

$$p = \frac{3t-1}{2} = \frac{6k+2}{2} = 3k + 1,$$

$$m = \frac{5p+1}{3} = \frac{15k+6}{3} = 5k + 2,$$

$$n = \frac{8m+4}{5} = \frac{40m+20}{5} = 8k + 4.$$

Итак, целыми решениями уравнения (2) являются пары чисел (n, m) вида $n = 8k + 4$, $m = 5k + 2$ при любом $k \in \mathbf{Z}$.

Замечание. Представленный метод практически повторяет известный ***алгоритм Евклида*** для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел.

1. Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях

Для раскрытия способов отбора корней рассмотрим простейшие тригонометрические уравнения и системы (совокупности), содержащие простейшие тригонометрические уравнения и неравенства.

1.1. Арифметический способ

Рассмотрим примеры, в которых используется арифметический способ отбора корней.

непосредственная подстановка корней в уравнение и имеющиеся ограничения

В случае непосредственной подстановки серий полученных решений для удаления «посторонних» решений полезным оказывается использование формул приведения. В частности,

$$\sin(x+\pi k)=\begin{cases}\sin x, \text{ при } k=2n,\\ -\sin x, \text{ при } k=2n+1,\end{cases} \quad n\in\mathbf{Z};$$

$$\cos(x+\pi k)=\begin{cases}\cos x, \text{ при } k=2n,\\ -\cos x, \text{ при } k=2n+1,\end{cases} \quad n\in\mathbf{Z};$$

$$\operatorname{tg}(x+\pi k)=\operatorname{tg}x,\ \ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z};$$

$$\operatorname{ctg}(x+\pi k)=\operatorname{ctg}x,\ \ x\neq\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Пример 10. *Найти корни уравнения* $\cos x=0{,}5$*, удовлетворяющие неравенству* $\sin x\le 0$.

Решение. Из уравнения $\cos x=0{,}5$ получаем $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, или $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Проверим для полученных значений x выполнение условия $\sin x\le 0$. Для первой серии получаем

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}>0.$$

Следовательно, первая серия является «посторонней». Для второй серии получаем $\sin\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 11. *Найти корни уравнения* $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$*, удовлетворяющие неравенству* $\sin x<0$.

Решение. Из уравнения $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$ получим $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Отберем из полученных решений те значения x, для которых $\sin x<0$. Подставляя $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$ в это неравенство, находим: $\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ при $k=2n$, $n\in\mathbf{Z}$, и $\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\pi n\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ при $k=2n+1$, $n\in\mathbf{Z}$. Следовательно, корни исходного уравнения вида $\frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ удовлетворяют условию.

Ответ: $\frac{4\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 12. *Найти решения совокупности уравнений*

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=-1,\\ \sin x=\frac{1}{2},\end{array}\right.$$

удовлетворяющие неравенству $\operatorname{ctg}x\ge 0$.

Решение. Из совокупности имеем

$$\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\\ x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\end{array}\right. \quad n\in\mathbf{Z}.$$

Отберем значения x, удовлетворяющие условию $\operatorname{ctg}x\ge 0$.

Для решений первой серии получаем $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=0$, следовательно, условие $\operatorname{ctg}x\ge 0$ выполнено.

Для корней второй серии

$$\operatorname{ctg}\left((-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\right)=\operatorname{ctg}\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\begin{cases}\sqrt{3}, \text{если } n \text{ четно},\\ -\sqrt{3}, \text{если } n \text{ нечетно}.\end{cases}$$

Таким образом, условие $\operatorname{ctg} x \geq 0$ выполнено только для четных значений n, т.е. $n = 2m,\ m \in \mathbf{Z}$. Тогда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Обобщением предыдущих подстановок является рассмотрение множества значений целых чисел для параметра при разбиение его на три и более подмножеств.

Пример 13. *Найти корни уравнения* $\sin 3x = 1$, *удовлетворяющие неравенству* $\cos x \geq 0$.

Решение. Уравнение $\sin 3x = 1$ имеет корни $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$. Так как функции $\sin 3x$ и $\cos x$ имеют общий наименьший положительный период 2π, то для проверки неравенства $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}\right) \geq 0$ достаточно рассмотреть значения 0, 1, 2 для параметра n (пройти круг). Так как $\cos\frac{\pi}{6} \geq 0$ и $\cos\frac{3\pi}{2} \geq 0$, то получаем корни $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, удовлетворяющие данному условию.

Ответ. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней

Перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней приходится выполнять в случаях, когда требуется отобрать корни, принадлежащие заданному промежутку или некоторому условию.

Пример 14. *Решить систему*:

$$\begin{cases} \sin 3x = 0, \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Общий наименьший положительный период функций $\cos x$ и $\sin 3x$ равен 2π. Поэтому достаточно рассмотреть решения системы на промежутке $[0; 2\pi)$.

Из уравнения $\sin 3x = 0$ получаем $x = \frac{\pi k}{3},\ k \in \mathbf{Z}$. Подставляя поочередно значения 0, 1, 2, 3, 4, 5 для переменной k, найдем корни 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$, содержащиеся на промежутке $[0; 2\pi)$. Среди полученных решений отбираем те, для которых справедливо неравенство $\cos x \geq 0$. Остаются числа 0, $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$. Следовательно, исходная система имеет множество решений вида $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$

Ответ: $x = \pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 15. *Решить систему*:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \sin x = -0{,}5. \end{array}\right. \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases}$$

Решение. Из совокупности уравнений имеем

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \sin x = -0{,}5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi k}{2}, \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi l, \quad k, l, m \in \mathbf{Z}. \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, \end{array}\right.$$

Общий наименьший положительный период функций $\sin x$, $\cos 3x$, $\sin 2x$ равен 2π. Поэтому достаточно рассмотреть решения системы на промежутке $[0; 2\pi)$.

На промежутке $[0; 2\pi)$ содержатся корни 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$. Из условия $\cos 3x \neq 0$ получаем $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$, а на промежутке $[0; 2\pi)$ $x \neq \frac{\pi}{6}$, $x \neq \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{5\pi}{6}$, $x \neq \frac{7\pi}{6}$, $x \neq \frac{3\pi}{2}$, $x \neq \frac{11\pi}{6}$. Таким образом, остались числа 0 и π, а значит, исходная система имеет множество решений вида $x = \pi t, t \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\pi t,\ t\in\mathbf{Z}$.

1.2. Алгебраический способ

Алгебраический способ отбора корней наиболее удобен в тех случаях, когда последовательный перебор значений параметров приводит к вычислительным трудностям, промежуток для отбора корней большой, значения обратных тригонометрических функций, входящих в серии решений, не являются табличными, и при решении задач с дополнительными условиями.

решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней

Пример 16. *Найти все решения совокупности уравнений* $\begin{cases}\cos x=0\\ \sin x=0{,}5\end{cases}$, *принадлежащие промежутку* $\left[-\pi;\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение. 1. $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$; $n\in\mathbf{Z}$. Так как решения должны удовлетворять неравенству $-\pi\le\frac{\pi}{2}+\pi n\le\frac{3\pi}{4}$, то, сократив на π, получим $-1\le\frac{1}{2}+n\le\frac{3}{4}$ или $-\frac{3}{2}\le n\le\frac{1}{4}$. С учетом того, что $n\in\mathbf{Z}$, получаем два значения $n=-1$ и $n=0$. Если $n=0$, то $x=\frac{\pi}{2}$, если $n=-1$, то $x=-\frac{\pi}{2}$.

2. $\sin x=0{,}5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\end{array}\right.\quad n\in\mathbf{Z}$.

Так как должно выполняться условие $-\pi\le x\le\frac{3\pi}{4}$, то для первой серии имеем

$$-\pi\le\frac{\pi}{6}+2\pi n\le\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow-1\le\frac{1}{6}+2n\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{7}{12}\le n\le\frac{7}{24}\Leftrightarrow n=0.$$

Отсюда получаем $x=\frac{\pi}{6}$.

Для второй серии имеем

$$-\pi\le\frac{5\pi}{6}+2\pi n\le\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow-1\le\frac{5}{6}+2n\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{11}{12}\le n\le-\frac{1}{24}.$$

Последнее неравенство не имеет целочисленных решений.

Ответ: $-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6}$.

Пример 17. *Найти все решения совокупности уравнений* $\left[\begin{array}{l}\cos 5x=0,\\ \cos x=0,\end{array}\right.$ *принадлежащие отрезку* $[1;2]$.

Решение. Найдем решения совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\cos 5x=0\\ \cos x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5},\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\end{array}\right.\quad k,n\in\mathbf{Z}.$$

Заметим, что первую серию решений можно записать в виде $x=\frac{\pi(1+2k)}{10}$, а вторую – $x=\frac{\pi(1+2n)}{2}$. Отсюда можно заметить, что решения второй серии содержатся в первой, так как их можно записать в виде

$$x=\frac{\pi(1+2n)}{2}=\frac{\pi(5+10n)}{10}=\frac{\pi(1+2(5n+2))}{10}.$$

Поэтому первая серия решений совокупности содержит все корни исходной совокупности уравнений. Можем записать $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}$, $k\in\mathbf{Z}$. Решим двойное неравенство

$$1\le\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}\le 2\ \Leftrightarrow\ 10\le\pi+2\pi k\le 20\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 10-\pi\le 2\pi k\le 20-\pi\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{10-\pi}{2\pi}\le k\le\frac{20-\pi}{2\pi}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{5}{\pi}-\frac{1}{2}\le k\le\frac{10}{\pi}-\frac{1}{2}.$$

Так как $\frac{5}{\pi}-\frac{1}{2}\ge\frac{5}{3{,}2}-\frac{1}{2}=\frac{17}{16}$, $\frac{10}{\pi}-\frac{1}{2}\le$ $\le\frac{10}{3}-\frac{1}{2}=\frac{17}{6}$ и $k\in\mathbf{Z}$, то $k=2$. Тогда $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}=\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами

Пример 18. *Решить систему уравнений*:

$$\begin{cases}\cos 2x=1,\\ \sin\frac{5x}{2}=1.\end{cases}$$

Решение. Получаем решения системы

$$\begin{cases}\cos 2x=1,\\ \sin\frac{5x}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pi n,\\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi m}{5},\end{cases} n,m\in\mathbf{Z}.$$

Найдем такие целые значения n и m, при которых решения в полученных сериях совпадают, т.е. приравнивая выражения для x в обеих сериях, получим

$$\pi n=\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi m}{5} \text{ или } 5n=1+4m.$$

Далее получим

$$4m=5n-1 \text{ или } m=\frac{5n-1}{4}=n+\frac{n-1}{4}.$$

Для существования целых решений число $\frac{n-1}{4}$ должно быть целым. Обозначим его буквой k, тогда

$$\frac{n-1}{4}=k \text{ или } n=4k+1, \text{ где } k\in\mathbf{Z}.$$

Тогда $m=\frac{5n-1}{4}=\frac{20k+4}{4}=5k+1$, $k\in\mathbf{Z}$.

Подставляя $n=4k+1$, $k\in\mathbf{Z}$, в первую серию решений или $m=5k+1$, $k\in\mathbf{Z}$, во вторую, получим общее решение $x=\pi(4k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $\pi(4k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$.

Пример 19. *Решить систему уравнений*:

$$\begin{cases}\sin 11x=-1,\\ \sin 3x=-1.\end{cases}$$

Решение. Найдем решения системы

$$\begin{cases}\sin 11x=-1,\\ \sin 3x=-1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{\pi}{22}+\frac{2\pi n}{11}, n\in\mathbf{Z},\\ x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi m}{3}, m\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Найдем такие целые значения n и m, при которых решения в полученных сериях совпадают $-\frac{\pi}{22}+\frac{2\pi n}{11}=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi m}{3}$, т.е. $3n=-2+11m$. Выражая из последнего равенства n, получаем $n=3m+\frac{2m-2}{3}$. Так как n – целое, то последнее равенство возможно, только если число $2m-2$ делится на 3, т.е. $2m-2=3k$, $k\in\mathbf{Z}$. Отсюда $m=1+k+\frac{k}{2}$. Поскольку m должно быть целым, то k должно быть четным. Если $k=2p$, где $p\in\mathbf{Z}$, то $m=1+2p+\frac{2p}{2}= =3p+1$. Следовательно,

$$x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi(3p+1)}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi p,\ p\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi p$, $p\in\mathbf{Z}$.

Пример 20. *Решить систему*:

$$\begin{cases}\cos 7x=0,\\ \cos 2x\ne 0,\\ \sin 5x\ne 0.\end{cases}$$

Решение. Из системы имеем

$$\begin{cases}\cos 7x=0,\\ \cos 2x\ne 0,\\ \sin 5x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}, & n\in\mathbf{Z},\\ x\ne\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, & k\in\mathbf{Z},\\ x\ne\frac{\pi m}{5}, & m\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Выясним, какие из значений $x=\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$, $n\in\mathbf{Z}$, являются недопустимыми. Для этого решим в целых числах уравнения

$$(a)\ \frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\ \text{ и } (б)\ \frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}=\frac{\pi m}{5}.$$

Рассмотрим уравнение (a). После преобразований получим:

$$2+4n=7+14k \Leftrightarrow 4n-14k=5.$$

Последнее равенство невозможно, так как в левой его части получаются при всех значениях n и k четные числа, а в правой – число нечетное.

Рассмотрим уравнение ($б$). После преобразований получим:

$$5+10n=14m \Leftrightarrow 14m-10n=5.$$

Последнее равенство невозможно, т.к. в левой его части стоят четные числа, а в правой – нечетное.

Значит, все значения $x=\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$, $n\in\mathbf{Z}$, являются допустимыми.

Ответ: $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Пример 21. *Найти сумму решений системы*

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{x+3\pi}{4}\right)=0,\\ \sin\left(\frac{x-2\pi}{3}\right)\neq 0,\end{cases}$$

принадлежащих промежутку $[\pi;80\pi]$.

Решение. Получаем из системы

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{x+3\pi}{4}\right)=0,\\ \sin\left(\frac{x-2\pi}{3}\right)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x+3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ \frac{x-2\pi}{3}\neq\pi k,\end{cases}$$

$$n,k\in\mathbf{Z}, \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\pi+4\pi n,\ n\in\mathbf{Z},\\ x\neq 2\pi+3\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

На отрезке $[\pi;80\pi]$ значения $x=-\pi+4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, образуют арифметическую прогрессию с разностью 4π и первым членом 3π. Количество членов этой прогрессии можно найти из неравенства:

$$\pi\le-\pi+4\pi n\le 80\pi,\ n\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}5\le n\le 20{,}25,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Таким образом, n может принимать все натуральные значения от 1 до 20 включительно. Значит, количество членов прогрессии $N=20$.

Найдем сумму S_1 этих двадцати членов:

$$S_1=\frac{2\cdot 3\pi+19\cdot 4\pi}{2}\cdot 20=820\pi.$$

Однако среди значений $x=-\pi+4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, имеются недопустимые. Чтобы выяснить, какие это значения, решим в целых числах уравнение:

$$-\pi+4\pi n=2\pi+3\pi k \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k=\frac{4n-3}{3} \Leftrightarrow k=n-1+\frac{n}{3}.$$

Поскольку k и n – целые числа, то $n=3t$, где $t\in\mathbf{Z}$. Таким образом, недопустимые значения переменной x получаются при $n=3t$. Итак, $x\neq-\pi+12\pi t$, $t\in\mathbf{Z}$.

На отрезке $[\pi;80\pi]$ значения $x=-\pi+12\pi t$, $t\in\mathbf{Z}$, образуют арифметическую прогрессию с разностью 12π и первым членом 11π. Очевидно, что количество членов этой прогрессии $N=6$. Тогда их сумма

$$S_2=\frac{2\cdot 11\pi+5\cdot 12\pi}{2}\cdot 6=246\pi.$$

Тогда искомая сумма

$$S=S_1-S_2=574\pi.$$

Ответ: 574π.

1.3. Геометрический способ

В последние годы в учебниках используются разные модели к иллюстрации решения простейших тригонометрических уравнений или неравенств: с применением тригонометрического круга или графика простейшей тригонометрической функции. В первом случае изображение решений связано с числовой окружностью, во втором – с числовой прямой.

отбор корней тригонометрического уравнения на числовой окружности

Тригонометрическую окружность удобно использовать при отборе корней на промежутке, длина которого не превосходит 2π, или в случае, когда значения обратных тригонометрических функций, входящих в серию решений, не являются табличными.

Пример 22. *Найти решения совокупности уравнений*: $\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \cos 5x = 0.\end{array}\right.$.

Решение. Из совокупности уравнений имеем

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \cos 5x = 0,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\\ x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5},\end{array}\right. \quad k, n \in \mathbf{Z}.$$

Отметим, что функции $\cos x$ и $\cos 5x$, входящие в совокупность уравнений, имеют общий наименьший положительный период 2π. Поэтому отбор корней удобно проводить на числовой окружности, при этом используя градусную меру полученных решений

$$x = 90° + k \cdot 180°$$

или

$$x = 18° + n \cdot 36°.$$

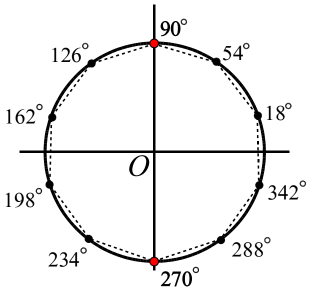

Рис. 11

Из рисунка 11 видим, что вторая серия решений включает в себя первую серию.

Ответ: $\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 23. *Определить количество решений системы* $\left\{\begin{array}{l}\cos 12x = 1,\\ \sin 3x \neq 0\end{array}\right.$ *на промежутке* $[0; 2\pi]$.

Решение. Из условия имеем

$$\left\{\begin{array}{l}\cos 12x = 1,\\ \sin 3x \neq 0,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi n}{6},\\ x \neq \dfrac{\pi k}{3},\end{array}\right. \quad n, k \in \mathbf{Z}.$$

Функции $\cos 12x$ и $\sin 3x$, входящие в систему, имеют основной период, не превосходящий 2π, поэтому проведем отбор корней уравнения системы, используя тригонометрическую окружность. Для этого полученные значения в серии решений и серии ограничений изобразим на тригонометрической окружности (см. рис. 12) и в ответ запишем количество не совпавших в обеих сериях значений переменной x.

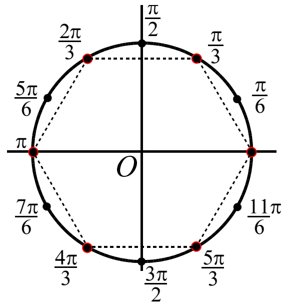

Рис. 12

Ответ: 6.

Пример 24. *Найти все решения совокупности уравнений*

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = -\dfrac{1}{2},\\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\end{array}\right.$$

удовлетворяющие неравенству $\cos x > 0$.

Решение. Получаем

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = -\dfrac{1}{2},\\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$n, k \in \mathbf{Z}.$$

Изобразим полученные решения на тригонометрической окружности (см. рис. 13).

Каждому уравнению соответствуют две точки на тригонометрической окружности. В ответ запишем только решения, расположенные на дуге окружности, соответствующей

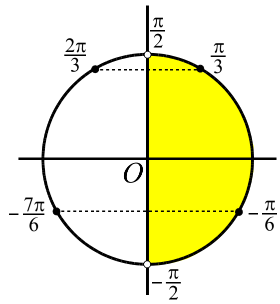

Рис. 13

неравенству $\cos x > 0$, т.е. лежащие в I и IV четвертях.

Следовательно, данному условию удовлетворяют решения $\frac{\pi}{3}+2\pi k$ или $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n,k\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

В случае маленьких значений корней можно воспользоваться приемом «укрупнения» этих значений.

Пример 25. *Решить совокупность уравнений*: $\left[\begin{aligned}&\sin\left(8x-\frac{\pi}{4}\right)=0,\\&\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0.\end{aligned}\right.$

Решение. Основной период функции $\sin\left(8x-\frac{\pi}{4}\right)$ равен $\frac{\pi}{4}$, $\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$ равен $\frac{\pi}{2}$. Так как общий период этих функций равен $\frac{\pi}{2}$, то при умножении на 4, период станет 2π.

Из условия имеем

$$\left[\begin{aligned}&\sin\left(8x-\frac{\pi}{4}\right)=0,\\&\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=\frac{\pi}{32}+\frac{\pi k}{8},\\&x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\end{aligned}\right.\quad k,n\in\mathbf{Z},\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&4x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\\&4x=\frac{3\pi}{2}+\pi n,\end{aligned}\right.\quad k,n\in\mathbf{Z}.$$

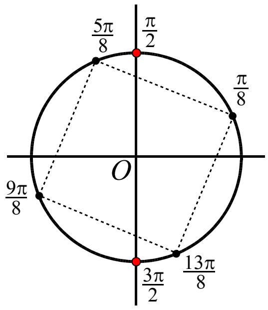

Рис. 14

Отметим на окружности полученные значения. Легко увидеть, что эти значения не совпадают (см. рис. 14).

Ответ: $\frac{\pi}{32}+\frac{\pi n}{8}$, $\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$.

отбор корней тригонометрического уравнения на числовой прямой

Тригонометрическую окружность удобно использовать для изображения точек вида $\alpha+\beta n,\ n\in\mathbf{Z}$, где $2\pi:\beta$ – натуральное число. Например, множеству чисел $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}n,\ \ n\in\mathbf{Z}$. на окружности соответствуют $2\pi:\frac{\pi}{3}=6$ точек. С другой стороны, числа вида $\frac{1}{4}+3n,\ n\in\mathbf{Z}$ целесообразнее отмечать на координатной прямой, так как число 2π не соизмеримо с числом 3, и на окружности будет бесконечное множество точек. Еще одна причина выбора числовой прямой связана с периодами функций превосходящих 2π. Например, числа $\frac{\pi}{4}+4\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}$, будут изображаться точкой $P_{\frac{\pi}{4}}$, но число, например, $\frac{\pi}{4}+2\pi$, которому также соответствует точка $P_{\frac{\pi}{4}}$, не входит в рассматриваемое множество чисел.

Пример 26. *Решить систему*:

$$\begin{cases}\cos\frac{x}{2}=0,\\\sin\frac{x}{3}\neq 0.\end{cases}$$

Решение. Из условия получаем

$$\begin{cases}\cos\frac{x}{2}=0,\\\sin\frac{x}{3}\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pi+2\pi k,\\x\neq 3\pi n,\end{cases}\quad k,n\in\mathbf{Z}.$$

Основной период функций, входящих в систему: $T\left(\cos\frac{x}{2}\right)=4\pi$, $T\left(\sin\frac{x}{3}\right)=6\pi$.

Общий наименьший положительный период функций равен 12π.

На числовой прямой (см. рис. 15) рассмотрим промежуток $(-\pi;11\pi]$. Отметим черными точками числа $-\pi$, π, 3π, 5π, 7π, 9π, 11π, соответствующие формуле

$x = \pi + 2\pi k,\ \ k \in \mathbf{Z}$. Крестиками отметим точки 0, 3π, 6π, 9π, соответствующие формуле $x \neq 3\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Числа, не отмеченные крестиками, лучше разбить на два множества с разностью 6π и записать общий ответ.

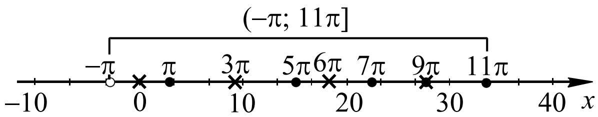

Рис. 15

Ответ: $\pi + 6\pi n,\ 5\pi + 6\pi n \in \mathbf{Z}$.

Замечание. Исходя из формул системы $\begin{cases} x = \pi + 2\pi k, \\ x \neq 3\pi n, \end{cases}$ $k, n \in \mathbf{Z}$, достаточно было рассмотреть на числовой прямой промежуток $(-\pi; 5\pi]$.

Пример 27. *Определить количество решений системы*

$$\begin{cases} \sin \pi x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos \pi x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

на промежутке $[-3; 5]$.

Решение. Из условия имеем

$$\begin{cases} \sin \pi x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos \pi x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} + 2k, \\ x = \dfrac{2}{3} + 2k, \end{array}\right. \quad k, n \in \mathbf{Z}, \\ x \neq \pm\dfrac{2}{3} + 2n, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} + 2k, \\ x \neq \pm\dfrac{2}{3} + 2n, \end{cases} \quad k,\ n \in \mathbf{Z}.$$

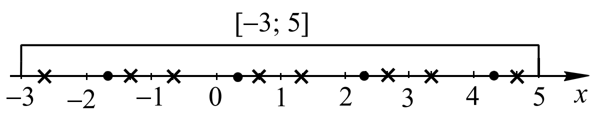

Рис. 16

Полученные значения в серии решений и серии ограничений изобразим на координатной прямой в промежутке $[-3; 5]$ и в ответ запишем количество не совпавших в обеих сериях значений переменной x (см. рис. 16).

Ответ: 4.

1.4. Функционально-графический способ

При изображении решений простейших тригонометрических неравенств иногда используют графики простейших тригонометрических функций. Для нахождения решения тригонометрического неравенства при этом подходе требуется схематичное построение графика простейшей тригонометрической функции и применение формул корней соответствующих уравнений.

Пример 28. *Решить неравенства*:

а) $\sin x < \dfrac{1}{2}$; б) $\sin x > \dfrac{1}{2}$.

Решение. Схематично изобразим графики функций $y = \sin x$ и $y = \dfrac{1}{2}$ (см. рис. 17). Для уравнения $\sin x = \dfrac{1}{2}$ запишем общее решение $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}$.

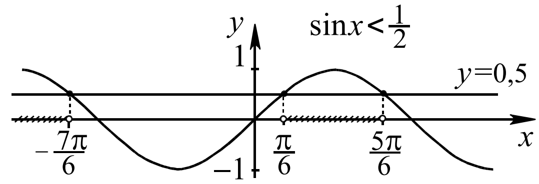

Рис. 17

Найдем три корня этого уравнения, последовательно придавая переменной n значения –1, 0 и 1: $-\dfrac{7\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{6}$ и $\dfrac{5\pi}{6}$. Полученные значения являются абсциссами трех последовательных точек пересечения построенных графиков. Неравенство $\sin x < \dfrac{1}{2}$ выполняется на промежутке $\left(-\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right)$ – график функции $y = \sin x$ расположен ниже прямой $y = \dfrac{1}{2}$, а неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$ выполняется на промежутке $\left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$ – график функции $y = \sin x$ расположен выше прямой $y = \frac{1}{2}$.

Добавляя слагаемое (период синуса) к концам этих интервалов, получаем окончательное решение:

для неравенства $\sin x < \frac{1}{2}$ в виде

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};$$

для неравенства $\sin x > \frac{1}{2}$ в виде

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

На рисунке штриховкой показаны решения неравенства $\sin x > \frac{1}{2}$.

Пример 29. *Решить неравенства*:

а) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Схематично изобразим графики функций $y = \cos x$ и $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (см. рис. 18). Для уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ за-

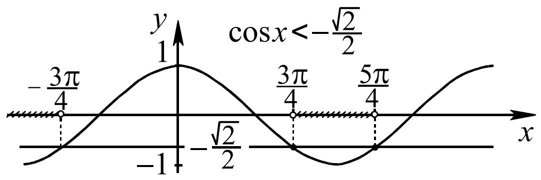

Рис. 18

пишем общее решение $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. При $n = 0$ найдем два корня этого уравнения $\pm\frac{3\pi}{4}$, при $n = 1$ выберем один корень $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$. Полученные значения являются абсциссами трех последовательных точек пересечения построенных графиков.

Неравенство $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ выполняется на промежутке $\left(\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right)$, а неравенство $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ выполняется на промежутке $\left(-\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$. Добавляя слагаемое (период косинуса) к концам этих интервалов, получаем окончательное решение:

для неравенства $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ в виде

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};$$

для неравенства $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ в виде

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 30. *Решить систему*

$$\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x > \frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ \sin x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad k, n \in \mathbf{Z}.$$

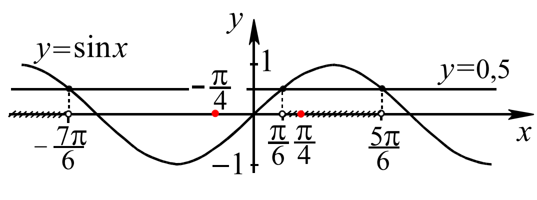

Рис. 19

Из рисунка 19 видно, что на промежутке $\left[-\frac{7\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$, длина которого 2π, неравенству $\sin x > \frac{1}{2}$ удовлетворяет одно число $\frac{\pi}{4}$. Следовательно, все числа вида

$\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}$ удовлетворяют данному уравнению.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 31. *Решить систему:*

$$\begin{cases}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \operatorname{tg}x>1.\end{cases}$$

Решение. Из условия получаем

$$\begin{cases}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \operatorname{tg}x>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,\\ \operatorname{tg}x>1,\end{cases}\quad k\in\mathbf{Z}.$$

На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, длина которого 2π, неравенству $\operatorname{tg}x>1$ удовлетворяет одно число $\frac{\pi}{3}$ (см. рис. 20). Следовательно, все числа вида $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}$, удовлетворяют данной системе.

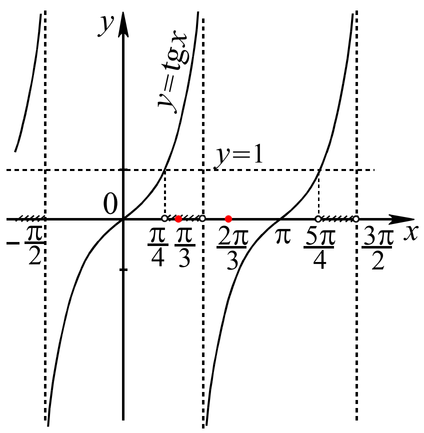

Рис. 20

Ответ: $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Тренировочные упражнения

3. Дано уравнение $\sin x=\frac{1}{2}$.

а) Решите уравнение.
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$.
в) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
г) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[0;4\pi]$.

4. Дано уравнение $\cos x=-\frac{1}{2}$.

а) Решите уравнение.
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$.
в) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.
г) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi;3\pi]$.

5. Дано уравнение $\sqrt{3}\operatorname{tg}x+3=0$.

а) Решите уравнение.
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]$.

6. Дано уравнение $\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

а) Решите уравнение.
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[0;2\pi]$.

7. Дано уравнение $\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

а) Решите уравнение.
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi;\pi]$.

8. Дано уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

а) Решите уравнение.
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-3\pi;3\pi]$.

9. Найдите те решения уравнения $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, для которых $\cos x>0$.

10. Найдите те решения уравнения $\cos x=-\frac{1}{2}$, для которых $\sin x>0$.

11. Дано уравнение $3\operatorname{ctg}3x-\sqrt{3}=0$.

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{6};\pi\right]$.

12. Решите систему $\begin{cases} \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0, \\ \sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\neq 0. \end{cases}$

13. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Основные методы решения тригонометрических уравнений

Для тригонометрических уравнений применимы общие методы решения (разложение на множители, замена переменной, функционально-графические) и равносильные преобразования общего характера.

2.1. Тригонометрические уравнения линейные относительно простейших тригонометрических функций

В данном пункте рассмотрим уравнения, содержащие синус, косинус, тангенс и котангенс степени не выше первой.

уравнения вида $\sin f(x)=a$, $\cos f(x)=a$, $\operatorname{tg} f(x)=a$ ***и*** $\operatorname{ctg} f(x)=a$

Уравнения данного вида сводятся к простейшим путем замены $f(x)=t$.

Часто задача осложняется тем, что требуется найти все решения уравнения, принадлежащие указанному промежутку.

Пример 32. *Найти все корни уравнения* $\cos 4x=0{,}3$, *принадлежащие промежутку* $[0;\pi]$.

Решение. Положив $4x=t$, будем искать корни уравнения $\cos t=0{,}3$, принадлежащие другому промежутку $[0;4\pi]$. Решения задаются формулами $t=\arccos 0{,}3+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$ или $x=-\arccos 0{,}3+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Так как $0<\arccos 0{,}3<\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}<-\arccos 0{,}3<0$, то неравенство $0\le\arccos 0{,}3+2\pi k\le 4\pi$ справедливо при $k=0$ и $k=1$. Соответственно, неравенство $0\le-\arccos 0{,}3+2\pi k\le 4\pi$ справедливо при $k=1$ и $k=2$. Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$x=\frac{1}{4}\arccos 0{,}3,\ x=\frac{1}{4}\arccos 0{,}3+\frac{\pi}{2}$$

и

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\arccos 0{,}3,\ x=\pi-\frac{1}{4}\arccos 0{,}3.$$

Ответ: $\frac{1}{4}\arccos 0{,}3$, $\frac{\pi}{2}\pm\frac{1}{4}\arccos 0{,}3$, $\pi-\frac{1}{4}\arccos 0{,}3$.

В тех случаях, когда промежутки привязаны к четвертям тригонометрической окружности, для отбора корней удобно использовать модель тригонометрической окружности.

Пример 33. *Найти все корни уравнения* $\sin 2x=\frac{1}{2}$, *принадлежащие промежутку* $[\pi;2\pi]$.

Решение. Решения уравнения $\sin 2x=\frac{1}{2}$ запишем совокупностью двух серий: $x=\frac{\pi}{12}+\pi n$ и $x=\frac{5\pi}{12}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

На числовой окружности (см. рис. 21) получаем два числа, удовлетворяющие условию задачи $\frac{\pi}{12}+\pi=\frac{13\pi}{12}$ и $\frac{5\pi}{12}+\pi=\frac{17\pi}{12}$.

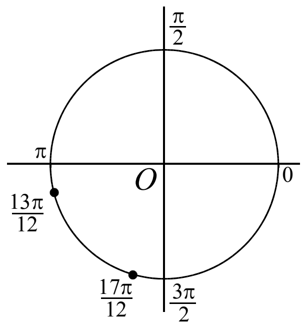

Рис. 21

Ответ: $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$.

В некоторых простых случаях замена не обязательна.

Пример 34. *Решить уравнение*

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение. Используя нечетность синуса, перепишем уравнение в виде $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Последнее равенство выполняется в двух случаях: $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2\pi n$ или $x-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Отсюда получаем $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ или $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pi+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$.

Тренировочные упражнения

15. Найдите корни уравнения $\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{5}\right)=1$, удовлетворяющие условию $-2<x<1$.

16. Найдите корни уравнения $\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, принадлежащие промежутку $[-\pi;\pi)$.

17. Найдите корни уравнения $\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, принадлежащие промежутку $[-2\pi;\pi)$.

18. Найдите корни уравнения $\sin\left(\frac{4x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$, принадлежащие промежутку $[-2\pi;2\pi)$.

19. Найдите корни уравнения $\sin\left(\frac{3x}{5}-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие промежутку $[-2;9)$.

20. Найдите корни уравнения $\sin\left(\frac{4x}{5}+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$, принадлежащие промежутку $[-8;12)$.

Линейные уравнения вида $a\cos x+b\sin x=c$

Если $a=0, b\neq 0$ или $a\neq 0, b=0$, то линейное уравнение $a\cos x+b\sin x=c$ приводится к простейшему уравнению $\sin x=\frac{c}{b}$ или $\cos x=\frac{c}{a}$.

Если a и b отличны от нуля, то данное линейное уравнение преобразуется к простейшему ***методом введения вспомогательного угла***. Рассмотрим этот метод на примерах.

Пример 35. *Решить уравнение*

$$\sqrt{3}\sin x-\cos x=2.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующим:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x-\frac{1}{2}\cdot\cos x=1;$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin x-\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x=1;$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1.$$

Отсюда получаем $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ или $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, где $m\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $m\in\mathbf{Z}$.

Пример 36. *Решить уравнение*

$$3\cos x+4\sin x=2.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующим:

$$\underbrace{\sqrt{3^2+4^2}}_{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\cos x+\frac{4}{5}\cdot\sin x\right)=2;$$

$$\frac{3}{5}\cdot\cos x+\frac{4}{5}\cdot\sin x=\frac{2}{5}.$$

Последнее уравнение представим в виде

$$\cos\varphi\cdot\cos x+\sin\varphi\cdot\sin x=\frac{2}{5},$$

где $\varphi=\arccos\frac{3}{5}$. Отсюда получаем

$$\cos(x-\varphi)=\frac{2}{5}.$$

Его решения имеют вид

$$x-\varphi=\pm\arccos\frac{2}{5}+2\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

Подставляя $\varphi=\arccos\frac{3}{5}$, имеем

$$x=\pm\arccos\frac{2}{5}+\arccos\frac{3}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $\pm\arccos\frac{2}{5}+\arccos\frac{3}{5}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Уравнение вида $a\cos x+b\sin x=c$, в случае, когда $c=0$, а коэффициенты a и b отличны от нуля, сводится к простейшему делением на $\cos x$ или $\sin x$.

Пример 37. *Решить уравнение*

$$\sin x-5\cos x=0.$$

Решение. Среди значений x, для которых $\cos x=0$, корней уравнения нет (если $\cos x=0$, то из уравнения следует, что и $\sin x=0$, а одновременно эти два равенства выполняться не могут). Значит, деление обеих частей уравнения на $\cos x$ не приведет к потере корней. Разделив, получим уравнение

$$\operatorname{tg}x-5=0,$$

откуда $x=\operatorname{arctg}5+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$

Ответ: $\operatorname{arctg}5+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Пример 38. *Решить уравнение*

$$8\sin 3x-15\cos 3x=1.$$

Решение. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{8^2+15^2}=17$. Уравнение примет вид

$$\frac{8}{17}\sin 3x-\frac{15}{17}\cos 3x=\frac{1}{17}\ \Leftrightarrow$$

$$\sin 3x\cos\varphi+\cos 3x\sin\varphi=\frac{1}{17}\ \Leftrightarrow$$

$$\sin(3x+\varphi)=\frac{1}{17},$$

где $\cos\varphi=\frac{8}{17}$, $\sin\varphi=-\frac{15}{17}$. Тогда имеем

$$x+\varphi=(-1)^n\arcsin\frac{1}{17}+\pi n;$$

$$x=-\varphi+(-1)^n\arcsin\frac{1}{17}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Так как $\cos\varphi=\frac{8}{17}>0$, $\sin\varphi=-\frac{15}{17}<0$, то угол φ лежит в четвертой четверти и поэтому $\varphi=\arcsin\left(-\frac{15}{17}\right)=-\arcsin\frac{15}{17}$.

Ответ: $\arcsin\frac{15}{17}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{17}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Тренировочные упражнения

Решите уравнения:

21. $\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}$.

22. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$.

23. Дано уравнение

$$\sqrt{3}\sin 4x+\cos 4x=0.$$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

24. Найдите корни уравнения $\sin 3x=\cos 3x$, принадлежащие отрезку $[0;4]$.

25. Найдите корни уравнения $\sin 2x=\sqrt{3}\cos 2x$, принадлежащие отрезку $[-1;6]$.

26. Найдите корни уравнения $\sqrt{3}\sin 2x=\cos 2x$, принадлежащие отрезку $[-1;4]$.

27. Найдите корни уравнения $\sqrt{3}\sin x+\cos x=1$ на отрезке $[-3\pi;3\pi]$.

28. Найдите корни уравнения $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ на отрезке $[-2\pi;4\pi]$.

2.2. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим уравнениям с помощью замены

В тех случаях, когда исходное уравнение может быть приведено к виду $f(g(x))=0$, то заменой $g(x)=t$ уравнение сводится к решению уравнения $f(t)=0$. Далее для каждого полученного корня t_k необходимо решить уравнение $g(x)=t_k$.

В тех случаях, когда множество значений функции $g(x)$ известно, то пишется ограничение на новую переменную. Например, $\sin x = t$ при $-1 \le t \le 1$, $\cos x = t$ при $-1 \le t \le 1$, $\sin^2 x = t$ при $0 \le t \le 1$, $\cos^2 x = t$ при $0 \le t \le 1$, $\arcsin x = t$ при $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, $\arccos x = t$ при $0 \le t \le \pi$, $\mathrm{arctg} x = t$ при $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{arcctg} x = t$ при $0 < t < \pi$.

Иногда при решении уравнений часть «посторонних» решений возникающих в результате замены могут быть удалены по причине несоответствия их области определения или множеству значений тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Напомним их.

Функция	Область определения	Множество значений
$y = \sin x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$
$y = \cos x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$
$y = \mathrm{tg}\, x$	все $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$	$(-\infty; +\infty)$
$y = \mathrm{ctg}\, x$	все $x \ne \pi + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$	$(-\infty; +\infty)$
$y = \arcsin x$	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arccos x$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$
$y = \mathrm{arctg}\, x$	$(-\infty; +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
$y = \mathrm{arcctg}\, x$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; \pi)$

Покажем на примерах как ограничение, связанное с новой переменной, позволяет проводить проверку на промежуточном этапе решения.

Пример 39. *Решить уравнение*

$$2\cos^2 \frac{x}{2} - 15\cos\frac{x}{2} - 8 = 0.$$

Решение. Обозначим $\cos\frac{x}{2} = t$, где $-1 \le t \le 1$. Полученное квадратное уравнение $2t^2 - 15t - 8 = 0$ имеет корни $t_1 = -\frac{1}{2}$ и $t_2 = 8$ (не удовлетворяет условию $-1 \le t \le 1$).

Решая уравнение $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$, получаем

$$\frac{x}{2} = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z},$$

$$x = \pm 2\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 4\pi n,\ n \in \mathbf{Z},$$

$$x = \pm 2\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 4\pi n,\ n \in \mathbf{Z},$$

$$x = \pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Пример 40. *Решить уравнение*

$$\arccos^2 x - 8\arccos x + 15 = 0.$$

Решение. Положим $\arccos x = t$. Так как множество значений функции $\arccos x$ – отрезок $[0; \pi]$, найдем решения уравнения $t^2 - 8t + 15 = 0$, удовлетворяющие условию $0 \le t \le \pi$. Такой корень один: $t = 3$. Если $t = 3$, то $\arccos x = 3$, откуда $x = \cos 3$.

Ответ: $\cos 3$.

Сведение тригонометрических уравнений к алгебраическим путем замены переменной – одна из наиболее плодотворных идей, используемая для решения тригонометрических уравнений. Рассмотрим несколько типичных ситуаций введения новой переменной.

уравнения, сводящиеся к многочлену от одной тригонометрической функции

Рассмотрим уравнения, сводящиеся к квадратным относительно синуса, косинуса, тангенса или котангенса.

Пример 41. *Решить уравнение*

$$2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, приведем уравнение к виду

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x = 0 \text{ или}$$
$$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0.$$

Отсюда

$\cos x = -0{,}5$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, или

$\cos x = 1$, $x = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Заметим, что все решения можно представить одной формулой $x = \frac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbf{Z}$.

Пример 42. *Решить уравнение*

$$2\sin^2\frac{x}{3} - 9\cos\frac{x}{3} + 3 = 0.$$

Решение. Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, перепишем уравнение в виде

$$2\left(1 - \cos^2\frac{x}{3}\right) - 9\cos\frac{x}{3} + 3 = 0,$$

или

$$2\cos^2\frac{x}{3} + 9\cos\frac{x}{3} - 5 = 0.$$

Заменой $\cos\frac{x}{3} = t$ уравнение сводится к квадратному $2t^2 + 9t - 5 = 0$, которое имеет два корня: $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = -5$. Возвращаясь к переменной x, получим: $\cos\frac{x}{3} = \frac{1}{2}$ и $\cos\frac{x}{3} = 5$. Уравнение $\cos\frac{x}{3} = \frac{1}{2}$ имеет корни $x = \pm\pi + 6\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; уравнение $\cos\frac{x}{3} = 5$ корней не имеет.

Ответ: $\pm\pi + 6\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Замечание. Вводя новую переменную $t = \cos\frac{x}{3}$, можно было сразу учесть, что значения косинуса ограничены отрезком $[-1; 1]$, и, значит, интерес представляют только те корни уравнения $2t^2 + 9t - 5 = 0$, которые удовлетворяют условию $|t| \le 1$. Накладывать при замене ограничения на новую переменную не обязательно, но во многих случаях – полезно, поскольку это иногда упрощает решение.

Пример 43. *Найти все корни уравнения* $\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x + 2 = 0$, *удовлетворяющие условию* $\sin 2x < 0$.

Решение. Если записать условие $\sin 2x < 0$ в виде $2\sin x \cdot \cos x < 0$, то становится очевидным, что оно выполняется в том и только в том случае, когда $\sin x$ и $\cos x$ имеют разные знаки, что в свою очередь равносильно условию $\operatorname{tg} x < 0$.

Введением новой переменной $\operatorname{tg} x = t$ сведем исходную задачу к решению смешанной системы:

$$t - 3\cdot\frac{1}{t} + 2 = 0,\ t < 0,$$

или

$$t^2 + 2t - 3 = 0,\ t < 0.$$

Уравнение $t^2 + 2t - 3 = 0$ имеет два корня $t = -3$, $t = 1$, из которых только первый удовлетворяет условию $t < 0$. Возвратившись к исходной переменной, получим уравнение $\operatorname{tg} x = -3$. Следовательно, $x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $-\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

решение уравнений, однородных относительно синуса и косинуса

Однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$ называют уравнения вида,

$$a_n \sin^n x + a_{n-1}\sin^{n-1} x\cos x + \ldots$$
$$\ldots + a_1 \sin x\cos^{n-1} x + a_0\cos^n x = 0,$$

в которых сумма показателей степеней у $\sin x$ и $\cos x$ (степень уравнения) во всех членах уравнения одинакова. Например,

$a\sin x + b\cos x = 0$ – однородное уравнение первой степени,

$a\sin^2 x + c\sin x\cos x + b\cos^2 x = 0$ – однородное уравнение второй степени,

$a\sin^3 x + c\sin^2 x\cos x + d\sin x\cos^2 x + b\cos^3 x = 0$ – однородное уравнение третьей степени.

Делением обеих частей уравнения на $\cos^k x$ или $\sin^k x$, где k – степень уравнения, однородные уравнения сводятся к алгебраическим относительно $t=\mathrm{tg}\,x$ или $t=\mathrm{ctg}\,x$.

Однако следует иметь в виду, что деление может привести к потере корней. Чтобы избежать этого, сначала требуется установить не являются ли корнями уравнения числа вида $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, при делении на $\cos^k x$, и, соответственно, числа вида $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, при делении на $\sin^k x$. Далее после делим на $\cos^k x$ или $\sin^k x$ ищем другие решение уравнения, отличные от указанных.

В частности, уравнения вида

$$a\sin^2 x+c\sin x\cos x+b\cos^2 x=d$$

приводятся к однородным путем представления правой части в виде:

$$d=d\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x).$$

Пример 44. *Решить уравнение*

$$10\cos^2 x-5\sin 2x=4.$$

Решение. Преобразуем обе части уравнения, воспользовавшись тождествами: $\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Последовательно имеем:

$$10\cos^2 x-5\sin 2x=4;$$

$$10\cos^2 x-5\cdot 2\sin x\cos x=4(\sin^2 x+\cos^2 x);$$

$$2\sin^2 x+5\sin x\cos x-3\cos^2 x=0.$$

Заметим, что среди значений *x*, для которых $\cos x=0$, корней уравнения нет, поскольку, если $\cos x=0$, то из уравнения следует, что и $\sin x=0$, а одновременно эти два равенства выполняться не могут. Значит, можно разделить обе части уравнения на $\cos^2 x$, не опасаясь потери корней. После деления получим уравнение

$$2\,\mathrm{tg}^2 x+5\,\mathrm{tg}\,x-3=0.$$

Решив его как квадратное относительно $\mathrm{tg}\,x$, найдем: $\mathrm{tg}\,x=0{,}5$, $\mathrm{tg}\,x=-3$, откуда $x=\mathrm{arctg}\,0{,}5+\pi n$, $x=-\mathrm{arctg}\,3+\pi n$.

Ответ: $\mathrm{arctg}\,0{,}5+\pi n$, $-\mathrm{arctg}\,3+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

симметрические уравнения

Рассмотрим тригонометрические уравнения $f(x)=0$, левая часть которых представляет собой рациональное выражение от переменных $t=\sin x+\cos x$ (или $t=\sin x-\cos x$) и $v=\sin x\cos x$. Поскольку

$t^2=(\sin x\pm\cos x)^2=1\pm 2\sin x\cos x=1\pm 2v$,

то $v=\frac{t^2-1}{2}$, если $t=\sin x+\cos x$, и $v=\frac{1-t^2}{2}$, если $t=\sin x-\cos x$. Следовательно, исходное уравнение сводится к алгебраическому относительно переменной t. Так как $\sin x\pm\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)$, то поиск корней алгебраического уравнения можно ограничить промежутком $|t|\le\sqrt{2}$.

Пример 45. *Решить уравнение*

$$1+2\sin x\cos x+2(\sin x+\cos x)=0.$$

Решение. Введем новую переменную $\sin x+\cos x=t$, $|t|\le\sqrt{2}$. С учетом равенства $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$ перепишем уравнение в виде $1+2\cdot\frac{t^2-1}{2}+2t=0$, или $t(t+2)=0$. Последнее уравнение имеет два корня $t_1=0$ и $t_2=-2$, из которых только первый удовлетворяет условию $|t|\le\sqrt{2}$.

Вернемся к переменной x. Получим $\sin x+\cos x=0$, или $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$, откуда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 46. *Решить уравнение*

$$\sin^3 x-\cos^3 x-\sin x\cos x=1.$$

Решение. Воспользовавшись формулой разности кубов

$$\sin^3 x-\cos^3 x=(\sin x-\cos x)\times$$
$$\times(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)$$

перепишем уравнение в виде
$(\sin x - \cos x)(1 + \sin x\cos x) - \sin x\cos x = 1$.

Положим $\sin x - \cos x = t$, $|t| \le \sqrt{2}$. Тогда $t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x\cos x$, и, значит, $\sin x\cos x = \dfrac{1-t^2}{2}$. Таким образом, после замены получим уравнение

$$t\cdot\left(1 + \frac{1-t^2}{2}\right) - \frac{1-t^2}{2} - 1 = 0,$$

которое преобразуется к виду
$\left(1 + \dfrac{1-t^2}{2}\right)(t-1) = 0$, или $\left(3 - t^2\right)(t-1) = 0$.

Отсюда $t_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, $t_3 = 1$. Условию $|t| \le \sqrt{2}$ удовлетворяет только одно из найденных значений: $t = 1$.

Возвратимся к исходной переменной. Получим $\sin x - \cos x = 1$, или $\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$, $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$ или $x - \dfrac{\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$. Таким образом, исходное уравнение имеет две серии решений: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $x = \pi + 2\pi n$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Уравнения $f(x) = 0$, левая часть которых может быть представлена как многочлен от $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x$, сводятся к алгебраическим заменой $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = t$.

Пример 47. *Решить уравнение*

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 3(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x) + 4 = 0.$$

Решение. Положим $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = t$. Заметим, что

$$\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = \frac{1}{\sin x\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

и, следовательно, $|t| \ge 2$. Поскольку

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = $$
$$= (\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x)^2 - 2\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x = t^2 - 2,$$

то после замены получим уравнение
$(t^2 - 2) - 3t + 4 = 0$, или $t^2 - 3t + 2 = 0$.

Последнее уравнение имеет два корня $t = 1$ и $t = 2$, из которых только второй удовлетворяет условию $|t| \ge 2$. Если $t = 2$, то $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = 2$, или $\sin 2x = 1$, откуда $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

применение универсальной тригонометрической подстановки

Так как $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x$ выражаются через $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, то уравнение вида $f(\sin x, \cos x, \operatorname{tg}x, \operatorname{ctg}x) = 0$ подстановкой $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ часто удается свести к алгебраическому уравнению. При этом следует иметь в виду, что замена $\sin x$ на $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ и $\cos x$ на $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ ведет к сужению области определения уравнения, поскольку из рассмотрения исключаются значения x, при которых $\cos\dfrac{x}{2} = 0$, т.е. $x = \pi + 2\pi n$. Поэтому при применении универсальной тригонометрической подстановки необходимо дополнительно выяснить, являются или нет исключаемые из рассмотрения значения x корнями исходного уравнения.

Пример 48. *Решить уравнение*

$$\operatorname{tg}x + 1 = 2\sin(1{,}5\pi + 2x).$$

Решение. Преобразовав уравнение к виду $\operatorname{tg}x + 1 = -2\cos 2x$, введем новую переменную $\operatorname{tg}x = t$. Так как исходное уравнение не определено для $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, то такая замена не может привести к потере корней. Заменив $\cos 2x$ на $\frac{1-t^2}{1+t^2}$, получим уравнение $t+1=-2\frac{1-t^2}{1+t^2}$, которое равносильно каждому следующему уравнению:

$$(t+1)(1+t^2)+2(1-t^2)=0;$$

$$(t+1)(1+t^2)+2(1+t)(1-t)=0;$$

$$(t+1)(t^2-2t+3)=0.$$

Получаем $t=-1$ и, возвращаясь к переменной x, решаем уравнение $\operatorname{tg} x=-1$.

Отсюда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$.

Тренировочные упражнения

Решите уравнение:

29. $2\sin^2\frac{x}{2}+19\sin\frac{x}{2}-10=0$.

30. $2\cos^2 x+5\sin x+1=0$.

31. $2(\sin x-\cos x)+\sin 2x=0{,}56$.

32. $5\sin 2x-11(\sin x+\cos x)+7=0$.

33. $3\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x=2$.

34. $5\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=4$.

35. $3\operatorname{tg} x+2\operatorname{ctg} x=5$.

36. $4\operatorname{tg} x-3\operatorname{ctg} x=1$.

37. $\frac{4^{\cos^2\frac{x}{2}}}{\left(\sqrt{2}\right)^{\sin x}}=\left(2^{\sin\frac{x}{2}}\right)^{\sin\frac{x}{2}}$.

38. $3^{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{3^3}}{\left(\sqrt{3}\right)^{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}}$.

39. Решите уравнение

$$6\cos^2 x-7\cos x-5=0.$$

Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi;2\pi]$.

40. Решите уравнение

$$4\sin^2 x-12\sin x+5=0.$$

Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi;2\pi]$.

41. Дано уравнение

$$2\sin^2 x-3\cos x-3=0.$$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[\pi;3\pi]$.

42. Дано уравнение

$$\sin^2 x-2\sin x\cdot\cos x-3\cos^2 x=0.$$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

43. Дано уравнение $\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x+6=0$.

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

44. Дано уравнение $\frac{1}{\cos^2 x}+4\operatorname{tg} x-6=0$.

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

45. Дано уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}-\frac{2}{\operatorname{tg} x}-3=0$.

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

2.3. Метод разложения на множители

Один из основных подходов к решению тригонометрических уравнений состоит в их последовательном упрощении с целью сведения к одному или нескольким простейшим. Для упрощения используются тригонометрические формулы. Универсального ответа на вопрос, какие формулы следует применить в том или ином случае, нет, однако есть ряд приемов, которые полезно иметь в виду при поиске решения.

Довольно часто в результате преобразований удается привести уравнение к виду $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_k(x)=0$. В этом случае дальнейшее решение сводится к поиску корней уравнений $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, …, $f_k(x)=0$ и дальнейшему отбору тех из них, которые принадлежат области определения исходного уравнения.

Такой подход к решению уравнений, известный как метод разложения на множители, является универсальным (его применяют при решении рациональных, иррациональных, показательных и логарифмических уравнений).

Пример 49. *Решить уравнение*

$$6\sin x\cos x+\sin 2x\sin\frac{2}{x}=0.$$

Решение. Воспользуемся формулой синуса двойного аргумента

$$3\sin 2x+\sin 2x\sin\frac{2}{x}=0,$$

$$\sin 2x\left(3+\sin\frac{2}{x}\right)=0.$$

Так как $3+\sin\frac{2}{x}>0,$ то последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin 2x=0\\ x\neq 0,\end{cases}\Leftrightarrow\quad x=\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbf{Z},\ k\neq 0.$$

Ответ: $\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbf{Z},\ k\neq 0.$

Пример 50. *Решить уравнение*

$$\operatorname{tg}x(\sin x-1)=0.$$

Решение. Так как общий наименьший период функций $\operatorname{tg}x$ и $\sin x$ равен 2π, то отбор корней удобно проводить на промежутке $[0;2\pi)$. Проведем равносильные преобразования:

$$\operatorname{tg}x(\sin x-1)=0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=1,\end{array}\right.\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\end{array}\right.\\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi m,\end{cases}\quad n,k,l\in\mathbf{Z}.$$

На промежутке $[0;2\pi)$ из трех корней $0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$ исключаем число $\frac{\pi}{2}$, поэтому множество корней данного уравнения задается формулой $x=\pi l,\ l\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $\pi l,\ l\in\mathbf{Z}$.

Пример 51. *Решить уравнение*

$$\cos 8x\cdot\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}x.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\operatorname{tg}x\cdot(\cos 8x-1)=0.$$

Функции, входящие в последнее уравнение, определены при всех x кроме $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. На этом множестве последнее уравнение равносильно совокупности уравнений $\operatorname{tg}x=0$ и $\cos 8x=1$, решения которых определяются формулами $x=\pi n$ и $x=\frac{\pi n}{4},\ n\in\mathbf{Z}$.

Теперь необходимо отобрать из полученных значений x те, которые удовлетворяют условию $\cos x\neq 0$, т.е. $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. Для первой серии корней условие $\cos x\neq 0$ выполняется. Для отбора корней второй серии $x=\frac{\pi n}{4}$ воспользуемся следующим.

Представим число n в виде $n=4k+p$, где $k\in\mathbf{Z}$, а p принимает значения 0, 1, 2 и 3. Тогда при разных значениях p корни второй серии будут иметь вид:

$x=\pi k$ при $p=0$; $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ при $p=1$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ при $p=2$ и $x=\frac{3\pi}{4}+\pi k$ при $p=3$.

Значит при $p=2$ получаются «запрещенные» значения, а все оставшиеся решения можно задать, например, как совокупность серий: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$ и $\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$, причем вторая из этих серий была получена ранее.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

В случае тригонометрических уравнений проблема преобразования исходного уравнения к виду уравнения к виду $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_k(x)=0$ решается, главным образом, путем использования тригонометрических формул. Рассмотрим, как это делается, на примерах.

Пример 52. *Решить уравнение*

$$\cos 2x - \sin x + \cos x = 0.$$

Решение. Так как

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

то данное уравнение равносильно следующим:

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + (\cos x - \sin x) = 0;$$

$$(\cos x - \sin x)\cdot(\cos x + \sin x + 1) = 0.$$

Полученное уравнение в свою очередь равносильно совокупности уравнений

$$\cos x - \sin x = 0 \text{ и } \cos x + \sin x + 1 = 0.$$

1) $\cos x - \sin x = 0$; $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2) $\cos x + \sin x + 1 = 0$;

$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$; $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$x = \pm\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\pm\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Если уравнение содержит выражения $\sin\alpha \pm \sin\beta$, $\cos\alpha \pm \cos\beta$, то для разложения на множители можно попробовать применить формулы преобразования этих сумм (разностей) в произведения.

Пример 53. *Решить уравнение*

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде $(\sin x + \sin 3x) + (\sin 2x + \sin 4x) = 0$. Далее преобразуем это уравнение, используя формулу

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Получим

$$2\sin 2x\cos x + 2\sin 3x\cos x = 0;$$

$$\cos x(\sin 2x + \sin 3x) = 0;$$

$$\cos x\cdot\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 0.$$

Последнее уравнение распадается на три:

1) $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$;

2) $\sin\frac{5x}{2} = 0$; $x = \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$;

3) $\cos\frac{x}{2} = 0$; $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{2\pi n}{5}$, $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 54. *Найти наибольший отрицательный корень уравнения*

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

Решение. Последовательно имеем

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sin\frac{3x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{3x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\frac{3x}{2} = 0, \\ \cos\frac{x}{2} = 0, \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi n}{3}, \\ x = \pi + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi l, \end{array}\right. \quad n,\ k,\ l \in \mathbf{Z}.$$

Продемонстрируем применение различных способов для отбора наибольшего отрицательного корня данного уравнения.

Алгебраический способ. Для каждой серии корней решим неравенства относительно соответствующего параметра *n*, *k* и *l*.

а) Для первой серии корней имеем $\frac{2\pi n}{3} < 0,\ n \in \mathbf{Z}$. Отсюда получаем $n < 0$, а наибольшее целое отрицательное значение $n = -1$ и корень $x = -\frac{2\pi}{3}$.

б) Второе неравенство $\pi+2\pi k<0$, $k\in\mathbf{Z}$, выполняется, если $k<-0{,}5$; $k\in\mathbf{Z}$, или $k=-1$ и $x=-\pi$.

в) $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi l$, $l\in\mathbf{Z}$, и $\dfrac{\pi}{2}+\pi l<0$, тогда $l<-\dfrac{1}{2}$, $l\in\mathbf{Z}$, или $l=-1$ и $x=-\dfrac{\pi}{2}$.

Выбираем наибольший отрицательный корень уравнения $x=-\dfrac{\pi}{2}$.

Арифметический способ. Выполнив перебор значений параметров *n*, *k* и *l*, найдем значения для переменной *x*.

а) $x=\dfrac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$. Пусть $n=0$, тогда $x=0$. Если $n=-1$, то $x=-\dfrac{2\pi}{3}$.

б) $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Последовательно подставляем $k=0$ и $k=-1$, получаем $x=\pi$ и $x=-\pi$ соответственно.

в) $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi l$, $l\in\mathbf{Z}$. Тогда при $l=0$ и $l=-1$ вычисляем $x=\dfrac{\pi}{2}$ и $x=-\dfrac{\pi}{2}$. Так как $-\pi<-\dfrac{2\pi}{3}<-\dfrac{\pi}{2}$, то наибольший отрицательный корень уравнения $x=-\dfrac{\pi}{2}$.

Геометрический способ. На тригонометрическом круге изобразим точками числа, соответствующие найденным сериям решений (рис. 22).

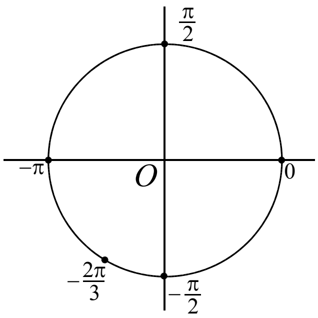

Рис. 22

При обходе по тригонометрической окружности в отрицательном направлении первое встретившееся число есть $-\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{2}$.

Тренировочные упражнения

46. Найдите все решения уравнения $\sin 2x=\cos x$, принадлежащие промежутку $\left[-\pi;\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

47. Найдите все корни уравнения
$$(2\sin x+1)(2\sin x-\sqrt{3})=0,$$
удовлетворяющие неравенству $\cos x>0$.

48. Решите уравнение
$$\cos 12x-\sin 4x=0.$$

49. Решите уравнение
$$\cos x\cos 5x=0.$$

50. Найдите сумму корней уравнения $(\mathrm{tg}x+1)(\sin x-1)=0$, принадлежащие промежутку $[-50°;\ 350°]$.

51. Найдите сумму корней уравнения $(\mathrm{ctg}\,x+\sqrt{3})\sin 2x=0$, принадлежащие промежутку $[-100°;\ 300°]$.

52. Найдите все корни уравнения $(\sqrt{2}\sin x+1)(2\sin x-3)=0$, удовлетворяющие неравенству $\mathrm{tg}x<0$.

53. Найдите все корни уравнения $(\sqrt{2}\cos x-1)(2\cos x+1)=0$, удовлетворяющие неравенству $\sin x<0$.

54. Найдите все корни уравнения $(2\cos x+\sqrt{3})(3\cos x+4)=0$, удовлетворяющие неравенству $\mathrm{tg}\,x>0$.

55. Найдите все корни уравнения $(\mathrm{tg}\,x+\sqrt{3})(2\cos x-1)=0$, удовлетворяющие неравенству $\sin x>0$.

56. Найдите все корни уравнения $(\mathrm{tg}x-1)(\sqrt{2}\sin x+1)=0$, удовлетворяющие неравенству $\cos x<0$.

57. Найдите все корни уравнения $3\mathrm{tg}^2 x=1$, удовлетворяющие неравенству $\sin x<0$.

58. Найдите все корни уравнения $\sqrt{2}\sin^2 x=\sin x$, удовлетворяющие неравенству $\cos x<0$.

59. Найдите все корни уравнения $2\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x=0$, удовлетворяющие неравенству $\sin x<0$.

60. Найдите все корни уравнения $\mathrm{tg}^2 x=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x$, удовлетворяющие неравенству $\cos x<0$.

61. Решите уравнение $\mathrm{ctg}x-\cos x=0$.

62. Решите уравнение $\mathrm{tg}\,x+\sin x=0$.

63. Решите уравнение
$$\left(\mathrm{ctg}\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)\left(\cos\frac{x}{4}+1\right)=0.$$

64. Решите уравнение

$$\sin x \cdot \sin 5x = \cos 4x .$$

65. Решите уравнение

$$\cos x \cdot \cos 5x = \cos 6x .$$

66. Укажите все корни уравнение

$$\sin 2x + \sqrt{2} \sin x = 0 ,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$.

67. Решите уравнение

$$(x^2 - 5x + 6) \cdot \arcsin \frac{x}{2} = 0 .$$

68. Решите уравнение

$$(x+2)(2x^2 - 7x + 3) \cdot \arccos \frac{x}{2} = 0 .$$

69. Дано уравнение

$$2 \sin 2x = 4 \cos x - \sin x + 1 .$$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$.

70. Дано уравнение

$$3 \sin 2x - 4 \cos x + 3 \sin x - 2 = 0 .$$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$.

71. Дано уравнение

$$\sin 2x = 2 \sin x - \cos x + 1 .$$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$.

72. Дано уравнение

$$\sin 8x \cos 2x = \sin 7x \cos 3x .$$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$.

73. Дано уравнение

$$\sin 10x \sin 2x = \sin 8x \sin 4x .$$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right]$.

2.4. Функциональный метод

Область применения свойств функции при решении уравнений очень широка. Наличие свойств (ограниченность, монотонность и т.д.) функций, входящих уравнение позволяет применить нестандартные методы решения к стандартным по формулировке задачам – уравнениям.

Использование области определения функций

Предварительный анализ области допустимых значений неизвестной уравнения иногда позволяет получить корни без преобразований уравнения.

Рассмотрим ограничения, связанные с областью определения и множеством значений функции.

Пример 55. *Решить уравнение*

$$\arccos \frac{3x+4}{1-2x} = \pi x + 6\pi .$$

Решение. В соответствии с определением арккосинуса запишем ограничения, которым должен удовлетворять x. Область допустимых значений уравнения определяется условиями $-1 \le \frac{3x+4}{1-2x} \le 1$, а поскольку значения арккосинуса ограничены отрезком $[0, \pi]$, то для выполнения равенства необходимо выполнение условия $0 \le \pi x + 6\pi \le \pi$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} -1 \le \dfrac{3x+4}{1-2x} \le 1, \\ 0 \le \pi x + 6\pi \le \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+4}{1-2x} \ge -1, \\ \dfrac{3x+4}{1-2x} \le 1, \\ 0 \le x + 6 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+5}{1-2x} \ge 0, \\ \dfrac{5x+3}{1-2x} \le 0, \\ -6 \le x \le -5 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = -5.$$

Подставляя полученное единственное значение $x = -5$ в исходное уравнение, получим

$$\arccos \frac{3 \cdot (-5) + 4}{1 - 2 \cdot (-5)} = \pi \cdot (-5) + 6\pi ,$$

$\arccos\dfrac{-11}{11}=\pi$ или $\arccos(-1)=\pi-$ верно.

Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение $x=-5$.

Ответ: -5.

Использование ограниченности функций

Для использования ограниченности функции необходимо уметь находить множество значений функции и знать оценки области значений стандартных функций (например, $-1\le\sin x\le 1$; $0\le\cos^2 x\le 1$;

$-\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$ и т.д.).

метод оценки

Этот метод применяется при решении уравнений $f(x)=g(x)$, в которых его левые и правые части на всей ОДЗ удовлетворяют неравенствам $|f(x)|\le M$, $|g(x)|\ge M$. В этом случае уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases}f(x)=M,\\ g(x)=M\end{cases}\text{ и }\begin{cases}f(x)=-M,\\ g(x)=-M.\end{cases}$$

Соответственно, решив по отдельности каждое из уравнений приведенных систем, в дальнейшем нужно отобрать их общие решения.

Отметим, что метод оценки удобно использовать и при отборе корней уравнения.

Пример 56. *Решить уравнение*

$$3^{(\sqrt{3}-\sin 12\pi x)(\sqrt{3}+\sin 12\pi x)}=27+(4x-5)^2.$$

Решение. Оценим левую часть данного уравнения, начиная с выражения

$$(\sqrt{3}-\sin 12\pi x)(\sqrt{3}+\sin 12\pi x)=3-\sin^2 12\pi x.$$

Так как $0\le\sin^2 12\pi x\le 1$, то последовательно получаем $-1\le-\sin^2 12\pi x\le 0$, $2\le 3-\sin^2 12\pi x\le 3$, $9\le 3^{3-\sin^2 12\pi x}\le 27$. Для правой части имеем $(4x-5)^2\ge 0$, $27+(4x-5)^2\ge 27$ при всех значениях $x\in\mathbf{R}$. Равенство возможно только в том случае, если обе части уравнения равны 27, то есть исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}3^{3-\sin^2 12\pi x}=27\\ 27+(4x-5)^2=27.\end{cases}$$

Второе уравнение имеет один корень $x=\dfrac{5}{4}$, который удовлетворяет и первому уравнению системы.

Ответ: 1,25.

Пример 57. *Решить уравнение*

$$\cos\sqrt{2-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. Рассматривая данное уравнение как простейшее тригонометрическое уравнение, получим

$$\sqrt{2-x^2}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Так как $2-x^2\le 2$, то $0\le\sqrt{2-x^2}\le\sqrt{2}$.

Из всех чисел вида $\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$, отрезку $[0;\sqrt{2}]$ принадлежит только число $\dfrac{\pi}{6}$. Поэтому последнее уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{2-x^2}=\frac{\pi}{6}.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$x^2=2-\frac{\pi^2}{36},\text{ откуда }x=\pm\sqrt{2-\frac{\pi^2}{36}}.$$

Ответ: $\pm\sqrt{2-\dfrac{\pi^2}{36}}$.

ограниченность синуса и косинуса

Пример 58. *Решить уравнение*

$$\cos 4x+\sin\frac{5x}{3}=2.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде $\cos 4x=2-\sin\dfrac{5x}{3}$. Так как при любом значении x $\cos 4x\le 1$, а $2-\sin\dfrac{5x}{3}\ge 1$, то равенство $\cos 4x = 2 - \sin\frac{5x}{3}$ может выполняться в том и только в том случае, когда

$$\begin{cases}\cos 4x = 1,\\ \sin\frac{5x}{3} = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z},\\ x = \frac{3\pi}{10} + \frac{6\pi m}{5}, m \in \mathbf{Z}.\end{cases}$$

Найдем такие целые значения n и m, что $\frac{\pi n}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{6\pi m}{5}$, т.е. $5n = 3 + 12m$. Выражая из последнего равенства n, получаем $n = 2m + \frac{2m+3}{5}$. Так как n – целое, то последнее равенство возможно, если $2m+3$ делится на 5, т.е. $2m + 3 = 5k, k \in \mathbf{Z}$. Отсюда $m = 2k - 1 + \frac{k-1}{2}$. Поскольку m должно быть целым, то k должно быть нечетным. Если $k = 2p+1$, где $p \in \mathbf{Z}$, то $m = 2(2p+1) - 1 + \frac{(2p+1)-1}{2} = 5p+1$. Следовательно,
$x = \frac{3\pi}{10} + \frac{6\pi(5p+1)}{5} = \frac{3\pi}{2} + 6\pi p$.

Ответ: $\frac{3\pi}{2} + 6\pi p, p \in \mathbf{Z}$.

Пример 59. *Решить уравнение*

$$\sin 7x \cdot \cos 4x = -1.$$

Решение. Воспользовавшись формулой преобразования произведения синуса и косинуса в сумму, приводим уравнение к виду $\sin 11x + \sin 3x = -2$, откуда получим $\sin 11x = -2 - \sin 3x$. Так как при любом значении x $\sin 11x \ge -1$, а $-2 - \sin 3x \le -1$, то равенство $\sin 11x = -2 - \sin 3x$ может выполняться в том и только в том случае, когда

$$\begin{cases}\sin 11x = -1,\\ -2 - \sin 3x = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{22} + \frac{2\pi n}{11}, n \in \mathbf{Z},\\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}.\end{cases}$$

Найдем такие целые значения n и m, при которых $-\frac{\pi}{22} + \frac{2\pi n}{11} = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{3}$ т.е. $3n = -2 + 11m$. Выражая из последнего равенства n, получаем $n = 3m + \frac{2m-2}{3}$. Так как n - целое, то последнее равенство возможно, только если $2m-2$ делится на 3, т.е. $2m - 2 = 3k, k \in \mathbf{Z}$. Отсюда $m = 1 + k + \frac{k}{2}$. Поскольку m должно быть целым, то k должно быть четным. Если $k = 2p$, где $p \in \mathbf{Z}$, то $m = 1 + 2p + \frac{2p}{2} = 3p + 1$. Следовательно,
$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi(3p+1)}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi p$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi p, p \in \mathbf{Z}$.

применение классических неравенств

Рассмотрим классическое неравенство Коши, известное школьнику как неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим неотрицательных чисел, которое эффективно может быть использовано при решении уравнений.

Неравенство Коши для случая трех неотрицательных чисел

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc},$$

где равенство достигается при $a = b = c$, можно переписать в виде

$$a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc}.$$

Для случая двух неотрицательных чисел неравенство

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab},$$

где равенство достигается при $a = b$, можно переписать в виде $a + b \ge 2\sqrt{ab}$.

Отметим частные случаи неравенства Коши для двух неотрицательных чисел: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$ при $\frac{a}{b} > 0$, $a + \frac{1}{a} \ge 2$ при $a > 0$; при $a \ne 0$ $\left|a + \frac{1}{a}\right| \ge 2$.

Пример 60. *Решить уравнение*

$$\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x=2\cos 8x.$$

Решение. Оценим левую и правую части данного уравнения.

Так как $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x=\mathrm{tg}x+\dfrac{1}{\mathrm{tg}x}$, то $\left|\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x\right|\ge 2$. В то же время $\left|2\cos 8x\right|\le 2$. Значит, равенство $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x=2\cos 8x$ выполняется только в двух случаях:

1. $\begin{cases}\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x=2,\\ 2\cos 8x=2\end{cases}$ или 2. $\begin{cases}\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x=-2,\\ 2\cos 8x=-2.\end{cases}$

1. Из первого уравнения последовательно находим: $\dfrac{2}{\sin 2x}=2$, $\sin 2x=1$, $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; из второго: $\cos 8x=1$, $x=\dfrac{\pi k}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$. Нетрудно убедиться (например, воспользовавшись моделью тригонометрической окружности), что первое множество значений x содержится во втором, и, значит, $\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, – решение системы.

2. Решение первого уравнения $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, второго $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$. Равенство $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{4}$, т.е. $8n=3+2k$, невозможно ни при каких целых значениях n и k (в его левой части стоит четное, а в правой – нечетное число). Следовательно, эта система решений не имеет.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$.

Использование монотонности функций

При использовании монотонности функций различают случаи, когда функции, стоящие в обеих частях неравенства, имеют одинаковую монотонность или разную монотонность.

монотонность функции на множестве R

Если функция $f(t)$ строго возрастает на $\mathbf{R}$, то $f\big(h(x)\big)=f\big(g(x)\big)$ равносильно уравнению $h(x)=g(x)$.

Если функция $f(t)$ строго убывает на $\mathbf{R}$, то $f\big(h(x)\big)=f\big(g(x)\big)$ равносильно уравнению $h(x)=g(x)$.

Пример 61. *Решите уравнение*

$$\sin x\cdot 3^{\sin x+2}=(\sqrt{3}-\sin x)\cdot 3^{\sqrt{3}+2-\sin x}.$$

Решение. Пусть $\sin x=t$. Рассмотрим функцию $f(t)=t\cdot 3^{t+2}$, определенную при всех действительных значениях t.

Тогда данное уравнение примет вид

$$f(\sin x)=f(\sqrt{3}-\sin x).$$

Функция $f(t)$ строго возрастает на $\mathbf{R}$ как произведение двух возрастающих функций.

Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению $\sin x=\sqrt{3}-\sin x$ или $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, решением которого являются значения $x=(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}$.

монотонность функции на промежутке

• Если функция $f(t)$ строго монотонна на своей области существования – промежутке M, то уравнение $f\big(h(x)\big)=f\big(g(x)\big)$ равносильно системе

$$\begin{cases}h(x)=g(x)\\ E(h)\subset M\\ E(g)\subset M\end{cases}$$

Пример 62. *Решить уравнение*

$$\arcsin(3x^2-2x)=\arcsin(3x+2).$$

Решение. Перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases}3x^2-2x=3x+2,\\ -1\le 3x+2\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-5x-2=0,\\ -1\le 3x+2\le 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \\ -1 \le 3x+2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{3}$.

Пример 63. *Решить уравнение*

$$\arccos(x^2-3)=\arccos(x+3).$$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-3=x+3, \\ -1 \le x+3 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-6=0, \\ -4 \le x \le -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \end{array}\right. \\ -4 \le x \le -2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ: -2.

Пример 64. *Решить уравнение*

$$\arccos x = \arcsin 2x.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения определяется условиями $|x| \le 1$, $|2x| \le 1$, т.е. $|x| \le 0{,}5$. Более того, поскольку значения арккосинуса ограничены отрезком $[0,\pi]$, а арксинуса – отрезком $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, то равенство левой и правой частей уравнения возможно только в случае, если их значения лежат на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, т.е. с учетом области допустимых значений при $0 \le x \le 0{,}5$.

Таким образом, решение уравнения следует искать на множестве $0 \le x \le 0{,}5$. Так как функция $y=\cos t$ убывает на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, то на отрезке $[0;0{,}5]$ уравнение $\arccos x = \arcsin 2x$ равносильно уравнению $\cos(\arccos x)=\cos(\arcsin 2x)$, которое, в свою очередь, на $[0;0{,}5]$ равносильно уравнениям: $x=\sqrt{1-4x^2}$, $x^2=1-4x^2$, $5x^2=1$, $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

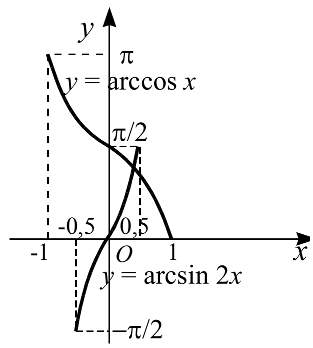

Рис. 23

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Замечание. Процесс решения уравнения в этом примере можно сделать наглядным, построив графики функций $y=\arccos x$ и $y=\arcsin 2x$ (рис. 23).

функции разной монотонности

Уравнение $u(x)=v(x)$, где $u(x)$ – возрастающая, а $v(x)$ – убывающая функции, либо не имеет решений (рис. 24*а*), либо имеет единственное решение (рис. 24*б*).

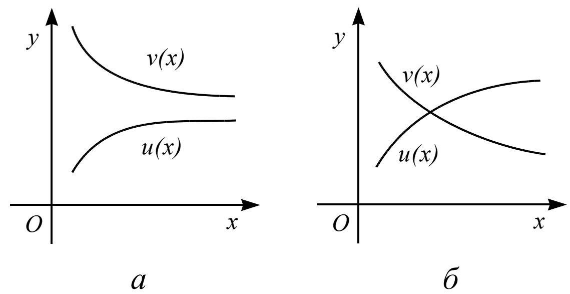

Рис 24

Пример 65. *Найти корни уравнения*

$$\cos x + \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x = \sqrt{3}\sin x$$

на промежутке $\left(-2\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Решение. Функция $f(x)=\cos x+\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x$ монотонно убывает на данном промежутке, как сумма убывающих функций. Функция $g(x)=\sqrt{3}\sin x$ монотонно возрастает на этом промежутке. Значит, исходное уравнение на промежутке $\left(-2\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right)$ имеет не более одного корня. Легко проверить, что число $-\dfrac{5\pi}{3}$ является корнем данного уравнения.

Ответ: $-\dfrac{5\pi}{3}$.

Использование периодичности функций

Поскольку тригонометрические функции не являются монотонными на всей области определения, то равенство значений синусов, косинусов, тангенсов или котангенсов неравносильно равенству аргументов. Из монотонности функции на некотором промежутке и ее периодичности нетрудно показать следующие равносильности:

$$\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \beta + 2\pi n, \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi n \end{array}\right. \qquad (1)$$

$$\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \beta + 2\pi n, \\ \alpha = -\beta + 2\pi n \end{array}\right. \qquad (2)$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + \pi n, \\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m \end{cases} \qquad (3)$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{ctg}\,\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi n, \\ \alpha \neq \pi m \end{cases} \qquad (4)$$

(во всех формулах $m, n \in \mathbf{Z}$).

Заметим также, что уравнения вида $\sin f(x) = \cos g(x)$ и $\mathrm{tg}\, f(x) = \mathrm{ctg}\, g(x)$ с помощью формул приведения сводятся к уравнениям-равенствам одноименных функций:

$$\sin f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right),$$

$$\mathrm{tg}\, f(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right).$$

Пример 66. *Решить уравнение*

$$\sin x = \cos 7x.$$

Решение. Используя тождество

$$\cos 7x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right),$$

перепишем уравнение в виде $\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 7x\right)$. Применив равносильный переход (1), сведем решение уравнения к решению совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} - 7x + 2\pi n, \\ x = \pi - \left(\dfrac{\pi}{2} - 7x\right) + 2\pi n, \end{array}\right. \quad \text{где } n \in \mathbf{Z}.$$

В результате получим две серии решений: $x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi n}{4}$ или $x = -\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Заметим, что вторую серию решений можно также задать в виде $x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3}$. Знак перед дробью $\dfrac{\pi n}{3}$ не имеет значения, поскольку параметр n пробегает все целые значения.

***Ответ*:** $\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi n}{4}$, $-\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 67. *Решить уравнение*

$$\mathrm{tg} x = \mathrm{tg} 3x.$$

Решение. Применив равносильный переход (3), получим

$$\mathrm{tg} x = \mathrm{tg} 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3x + \pi n, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi n}{2}, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m, \end{cases}$$

где $m, n \in \mathbf{Z}$.

Заметим, что если $n = 2m + 1$, где $m \in \mathbf{Z}$, то соответствующие значения x попадают в разряд «запрещенных», поскольку в этом случае $x = -\dfrac{\pi(2m+1)}{2} = -\dfrac{\pi}{2} - \pi m$.

При $n = 2m$, где $m \in \mathbf{Z}$, получаем решения вида $x = -\pi m$. Полученные решения можно записать как $x = \pi m$ так как $m \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$.

Замечание. Уравнения, представляющие собой равенства синусов или косинусов, можно решать иначе: путем преобразования разности синусов или косинусов в произведение.

Пример 68. *Решить уравнение*

$$\cos 2x - \cos x = 0.$$

Решение. По формуле преобразования суммы косинусов в произведение получим

$$-2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}=0.$$

Отсюда имеем $\sin\frac{x}{2}=0,\quad x=2\pi n,$ $n\in\mathbf{Z}$ или $\sin\frac{3x}{2}=0,\ x=\frac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbf{Z}.$

Заметим, что первая серия решений включается во вторую.

Использование четности и нечетности функций

• Если функция $f(x)$, определенная на некотором промежутке X, является на этом промежутке возрастающей или убывающей и принимает на X множество значений Y, то для каждого числа $a\in Y$ найдется единственное значение $x_0\in X$ такое, что $f(x_0)=a$.

Следствие 1. *Если нечётная функция $f(x)$ является возрастающей или убывающей при $x\ge 0$, то для каждого числа $a\in E(f)$ уравнение $f(x)=a$ имеет один корень.*

Следствие 2. *Если чётная функция $f(x)$ является возрастающей или убывающей при $x\ge 0$, то для каждого числа $a\in E(f)$ уравнение $f(x)=a$ имеет два корня x_1, x_2, где $x_1=-x_2$, если $a\ne f(0)$; и один корень $x_0=0$, если $a=f(0)$.*

Пример 69. *Решить уравнение*

$$x^{10}-(12x+13)^5=23\sin(12x+13)-23\sin x^2.$$

Решение. Приведём исходное уравнение к виду

$$x^{10}+23\sin x^2=(12x+13)^5+23\sin(12x+13).$$

Рассмотрим непрерывную функцию $f(t)=t^5+23\sin t$. Данная функция определенная для любого значения аргумента, нечётная, так как $f(-t)=(-t)^5+23\sin(-t)=-(t^5+23\sin t)=$ $=-f(t)$. Найдём её производную: $f'(t)=5t^4+23\cos t$. Покажем, что $f'(t)>0$ на всей области определения.

При $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$:

$$f'(t)=5t^4+23\cos t>3\cdot 0^2+23\cdot 0=0+0=0,$$

а при $|t|\ge\frac{\pi}{2}$:

$$f'(t)=5t^4+23\cos t>3\left(\frac{\pi}{2}\right)^4+23\cdot(-1)>$$
$$>5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4-23=25\tfrac{2}{16}-23>0.$$

Следовательно, $f(t)$ возрастает на всей числовой прямой. Значит, каждое своё значение функция принимает в точности при одном значении аргумента, а стало быть, уравнение $f(t_1)=f(t_2)$ равносильно уравнению $t_1=t_2$. Записав исходное уравнение в виде $f(x^2)=f(12x+13)$, получим

$$f(x^2)=f(12x+13)\Leftrightarrow x^2=12x+13\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ x^2-12x-13=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=13,\\ x=-1.\end{array}\right.$$

Ответ. -1; 13.

Пример 70. (ЕГЭ-2009, С5). *Решить уравнение*

$$87\cos(x^2)+(8-6x)^4=x^8+87\cos(8-6x).$$

Решение. Приведём исходное уравнение к виду

$$x^8-87\cos(x^2)=(8-6x)^4-87\cos(8-6x).$$

Рассмотрим непрерывную функцию $f(t)=t^4-87\cos t$. Данная функция определена для любого значения аргумента, чётная, так как $f(-t)=f(t)$. Найдём её производную: $f'(t)=4t^3+87\sin t$.

При $t\in(0;\pi)$:

$$f'(t)=4t^3+87\sin t>0+0=0,$$

а при $t\in[\pi;+\infty)$:

$$f'(t)=4t^3+87\sin t>4\pi^3-87>$$
$$4\cdot 3^3-87=4\cdot 27-87>0.$$

Таким образом, $f'(t)>0$ при $t\in(0;+\infty)$, следовательно, $f(t)$ возрастает на промежутке $[0;+\infty)$. Значит, каждое своё значение из множества значений $E(f)$, кроме $f(0)$, функция принимает в двух симметричных относительно $t=0$ точках, а стало быть, уравнение $f(t_1)=f(t_2)$ равносильно уравнению $|t_1|=|t_2|$. Записав исходное уравнение в виде $f(x^2)=f(8-6x)$, получим

$$f(x^2)=f(8-6x) \Leftrightarrow x^2=|8-6x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=8-6x, \\ x^2=6x-8; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+6x-8=0, \\ x^2-6x+8=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3-\sqrt{17}, \\ x=-3+\sqrt{17}, \\ x=2, \\ x=4. \end{array}\right.$$

Ответ: $-3-\sqrt{17}$; $-3+\sqrt{17}$; 2; 4.

Тренировочные упражнения

74. Решите уравнение $\operatorname{tg}2x=\operatorname{ctg}5x$.

75. Решите уравнение $\operatorname{ctg}3x=\operatorname{ctg}x$.

76. Дано уравнение $\cos 2x-\cos x=0$.
а) Решите уравнение.
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$.

77. Дано уравнение $\cos 6x-\cos 3x=0$.
а) Решите уравнение.
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$.

78. Укажите наибольший корень уравнения $\cos 2x+3\sin x=2$, принадлежащий отрезку $[-3\pi;-\pi]$.

79. Укажите наименьший корень уравнения $\cos 2x+2=3\cos x$, принадлежащий отрезку $[-2{,}5\pi;-0{,}5\pi]$.

Решите уравнение:

80. $\cos 3x\cdot\cos 2x=-1$.

81. $\sin 3x\cdot\cos 2x=1$.

82. $\cos\left(22\pi-\frac{13x}{4}\right)=3^{\sqrt{x}}$.

83. $2^{\sqrt{x}}=\sin\left(\frac{11x}{3}+\frac{33\pi}{2}\right)$.

84. $2^{\cos(\pi x+\pi)}=x^2-6x+11$.

85. $3^{\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)}=x^2+4x+7$.

86. $\cos x-1=x^2-4\pi x+4\pi^2$.

87. $x^2-\pi x+\frac{\pi^2}{4}=\sin x-1$.

88. $x^2-6x+10=\sin\frac{3\pi}{2}x$.

89. $x^2+4x+5=\cos 4\pi x$.

90. $|\cos((x-2)\cos x)|=1+|\log_4(9x^2-39x+43)|$.

91. $-2\cos x-\sqrt{x^2-\frac{3\pi}{2}x+\frac{\pi^2}{2}}=2$.

92. $3\sin x+\sqrt{x^2-\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi^2}{2}}=-3$.

93. $\arcsin(2x^3+2x^2-3x-0{,}2)=\arcsin(3x^2-2x-0{,}2)$.

94. $\arccos(2x^3+5x^2+x+0{,}2)=\arccos(2x+4x^2+0{,}2)$.

95. $\operatorname{arctg}(4x^2-8x-9)+\operatorname{arctg}16x^2=0$.

96. $\log_2(x^2-4x+8)=\sin\frac{5\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{2}$.

97. $\log_3(x^2+4x+13)=\cos\pi x-\sin\frac{\pi x}{4}$.

98. $\sqrt{x^2+(2-5\pi)x+6\pi^2-4\pi}+\sqrt{\sin(x-13\pi)}=0$.

99. $\sqrt{x^2-(3+\pi)x-6\pi^2+9\pi}+\sqrt{\cos\left(x+\frac{13\pi}{2}\right)}=0$.

100. $\sin\pi x+\cos\pi x=2^{\log_3\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{49}{16}}}$.

101. $\sqrt{(x+1)^2+16}=4-\sin^2\pi x$.

102. $98\cos(x^2)+(4x+3)^4=x^8+98\cos(4x+3)$.

103. $23\cos(x^2)-23\cos(12+8x)=x^6-|12+8x|^3$.

2.5. Комбинированные уравнения

Решение комбинированных уравнений представляет определенные трудности для учащихся. При решении этих уравнений применяют различные методы решения.

Уравнения, содержащие дроби

Пример 71. *Решить уравнение*

$$\frac{\cos x}{1-\sin x}=0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos x = 0,\\ 1-\sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x = 0,\\ \sin x \neq 1.\end{cases}$$

Если $\cos x = 0$, то из основного тригонометрического тождества $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$. Так как $\sin x \neq 1$, то остается отобрать те значения x, при которых $\sin x = -1$. Отсюда $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}$.

Пример 72. *Решить уравнение*

$$\frac{\cos x}{1+\sin x} = 1.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения определяется условием $1+\sin x \neq 0$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно следующим:

$$\frac{\cos x - \sin x - 1}{1+\sin x} = 0;\ \cos x - \sin x - 1 = 0;$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из последнего уравнения находим $x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ или $x+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, откуда $x = 2\pi n$ или $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Если $x = 2\pi n$, то

$$\sin x + 1 = \sin 2\pi n + 1 = 1;$$

если $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, то

$$\sin x + 1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) + 1 = 0.$$

Следовательно, числа $2\pi n$ входят, а числа $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ не входят в область допустимых значений исходного уравнения.

Ответ: $2\pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}$.

Пример 73. *Решить уравнение*

$$\frac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} = 1.$$

Решение. Общий наименьший положительный период функций $\cos x$, $\cos 3x$, $\sin 2x$ равен 2π. Поэтому достаточно рассмотреть решения уравнения на промежутке $[0; 2\pi)$.

Умножим обе части уравнения на $\cos 3x \neq 0$. Далее получаем

$$\cos x + \sin 2x = \cos 3x \Leftrightarrow$$
$$\cos 3x - \cos x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$$
$$-2\sin 2x \sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sin 2x(2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ \sin x = -\frac{1}{2},\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi k}{2},\\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi l,\\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi m,\end{array}\right. \quad k, l, m \in \mathbf{Z}.$$

На промежутке $[0; 2\pi)$ содержатся корни $0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}$. Из условия $\cos 3x \neq 0$ получаем $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$, а на промежутке $[0; 2\pi)$ – $x \neq \frac{\pi}{6}$, $x \neq \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{5\pi}{6}$, $x \neq \frac{7\pi}{6}$, $x \neq \frac{3\pi}{2}$, $x \neq \frac{11\pi}{6}$. Таким образом, остались числа 0 и π, а значит, исходное уравнение имеет множество корней $x = \pi t,\ t \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\pi t, t \in \mathbf{Z}$.

Пример 74. *Решить уравнение*

$$\mathrm{ctg}x + \mathrm{tg}2x = 0.$$

Решение. Имеем последовательно $\frac{1}{\mathrm{tg}x} + \frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2 x} = 0,\ \ 1+\mathrm{tg}^2 x = 0$. Последнее уравнение не имеет корней. При замене выражения $\mathrm{ctg}x$ на выражение $\frac{1}{\mathrm{tg}x}$ и при замене выражения $\mathrm{tg}2x$ на выражение $\frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$ может произойти потеря корней $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Проверкой убеждаемся, что числа этого вида являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 75. *Решить уравнение*

$$\operatorname{tg}5x\operatorname{tg}8x=-1.$$

Решение. $\operatorname{tg}5x\operatorname{tg}8x=-1 \Leftrightarrow$

$$\frac{\sin 5x}{\cos 5x}\cdot\frac{\sin 8x}{\cos 8x}=-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 8x\cos 5x+\sin 8x\sin 5x=0,\\ \cos 8x\neq 0,\\ \cos 5x\neq 0;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 3x=0,\\ \cos 8x\neq 0,\\ \cos 5x\neq 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, & n\in\mathbf{Z},\\ x\neq\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}, & k\in\mathbf{Z},\\ x\neq\frac{\pi}{10}+\frac{\pi m}{5}, & m\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Выясним, какие из значений $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$, являются недопустимыми. Для этого решим в целых числах уравнения $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}$ и $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi m}{5}$.

Рассмотрим уравнение $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}$. После преобразований получим: $8+16n=3+6k \Leftrightarrow 6k-16n=5$.

Последнее равенство невозможно, так как в левой его части стоят четные числа, а в правой – нечетное.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi m}{5}.$$

После преобразований получим:

$$5+10n=3+6m \Leftrightarrow 3m=5n+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{5n+1}{3} \Leftrightarrow m=2n-\frac{n-1}{3}.$$

Поскольку m и n – целые числа, то $n-1=3t$, где $t\in\mathbf{Z}$. Таким образом, $n=3t+1$ – недопустимые значения. Итак,

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}\ \text{и}\ n\neq 3t+1\ (t\in\mathbf{Z}).$$

Заметим, что в этой задаче форму записи ответа можно упростить. Для этого напомним, что при делении на 3 возможны только остатки 0, 1 или 2, т.е. любое целое число n представимо в одном из трех видов: $n=3t$, $n=3t+1$ или $n=3t+2$ ($t\in\mathbf{Z}$). Значит, либо $n=3t$, либо $n=3t+2$. Получаются две серии решений: $x_1=\frac{\pi}{6}+\pi t$ и $x_2=\frac{5\pi}{6}+\pi t$. Эти серии решений легко объединяются. Окончательно получаем: $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi l$, $l\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6}+\pi l$, $l\in\mathbf{Z}$.

Иногда умножение на выражение с переменной является ключевым при решении некоторых уравнений, которые не имеют дробей.

Пример 76. *Решить уравнение*

$$8\cos x\cos 2x\cos 4x=1.$$

Решение. Ключевым моментом в решении данного уравнения является умножение обеих частей уравнения на $\sin x$. Проверим имеет ли исходное уравнение корни уравнения $\sin x=0$, то есть числа $\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. Если n – четное, то есть $n=2n_1$, то подставляя $2\pi n_1$, получаем ложное равенство $8=1$. При нечетном n, то есть $n=2n_1+1$, подставим $2\pi n_1+\pi$. Получим также ложное равенство $-8=1$.

Преобразуем данное уравнение

$$8\cos x\cos 2x\cos 4x=1 \Rightarrow$$

$$8\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x=\sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sin 2x\cos 2x\cos 4x=\sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x\cos 4x=\sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 8x-\sin x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi m}{7},\\ x=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{9},\end{array}\right.\quad m,k\in\mathbf{Z}.$$

При умножении обеих частей уравнения на $\sin x$ могут появиться посторонние корни $\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Для $x=\frac{2\pi m}{7}$ рассмотрим уравнение $\frac{2\pi m}{7}=\pi n$ или $2m=7n$. Если n нечетное, то есть $n=2p+1,\ p\in\mathbf{Z}$, то равенство $2m-14p=7$ невозможно (в левой части четное число, в правой – нечетное). Пусть $n=2p,\ p\in\mathbf{Z}$, тогда имеем $m=7p,\ p\in\mathbf{Z}$. Отсюда следует, что числа вида $\frac{2\pi m}{7}$ являются корнями данного уравнения, где $m\neq 7p,\ p\in\mathbf{Z}$.

Если $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{9}$, то имеем $\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{9}=\pi n$ или $1+2k=9n$. Если n четное, то есть $n=2t,\ t\in\mathbf{Z}$, то равенство $1=18t-2k$ невозможно. Пусть $n=2t+1,\ t\in\mathbf{Z}$, тогда получаем $k=9t+4,\ t\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{2\pi m}{7},\ m\neq 7p;\ m,p\in\mathbf{Z};$
$\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{9},\ k\neq 9t+4;\ k,\ t\in\mathbf{Z}$.

Тренировочные упражнения

104. Решите уравнение
$$\frac{\cos x+\sin 2x}{\cos 3x}=1.$$

105. Определите количество корней уравнения $\frac{2\sin\pi x-\sqrt{3}}{2\cos\pi x+1}=0$ на промежутке $[-3;5]$.

Решите уравнение:

106. $\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{3}}=0$. **107.** $\frac{\cos 2x-1+\sin x}{\mathrm{ctg}x-1}=0$.

108. $\frac{\cos 2x+\cos x+1}{2\sin x+\sqrt{3}}=0$.

109. $\frac{\cos 2x-\sin x-1}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$.

110. $\frac{2-2\cos^2 x-\sqrt{3}\sin x}{\mathrm{tg}x-\sqrt{3}}=0$.

111. $\frac{2-2\sin^2 x-\sqrt{3}\cos x}{\mathrm{ctg}x-\sqrt{3}}=0$.

112. $\frac{\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sqrt{3}\mathrm{tg}x}{2\cos x-1}=0$.

113. $\frac{\sin 4x-\sin 2x-\cos 3x+2\sin x-1}{2\sin 2x-\sqrt{3}}=0$.

114. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $\frac{\sin 4x}{\mathrm{tg}2x}$ и $\frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\mathrm{tg}2x}$ принимают равные значения.

Решите уравнение:

115. $\mathrm{ctg}2x\cdot\cos 5x+\sin x=0$.

116. $\mathrm{tg}2x+\mathrm{tg}4x=\mathrm{tg}5x+\mathrm{tg}x$.

117. $\frac{\sin 3x}{\sin x}=0$. **118.** $\frac{2\sin x-\sqrt{3}}{2\cos x+1}=0$.

119. $\frac{\sin 2x}{\mathrm{tg}x}=\cos x$.

120. $\frac{1-\cos x+\sin x}{\cos x}=0$.

121. $\frac{\sin x-\cos x}{4x-\pi}=0$.

122. $\frac{\sin x+\cos x}{\cos x+\cos 3x}=1$.

123. $\frac{4\mathrm{tg}^2x-3\mathrm{tg}x}{5\sin^2x+3\sin x}=0$.

124. $\frac{3\mathrm{ctg}^2x+4\mathrm{ctg}x}{5\cos^2x-4\cos x}=0$.

125. $\frac{\cos 4x}{\sin 2x}=\frac{\sin 4x}{\cos 2x}$.

126. $4\cos x\cdot\mathrm{ctg}x+4\mathrm{ctg}x+\sin x=0$.

127. $3\sin 2x\cdot\mathrm{tg}x+4\cos^2 x=7\sin x+1$.

128. Найдите сумму различных корней уравнения
$$4\sin^2 7\pi x\cos^2 7\pi x+\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+14\pi x\right)=$$
$$=\frac{\sin\left(3\pi-\frac{5\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{5\pi x}{2}\right)}+\cos\left(\frac{4\pi x}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)$$
на отрезке $[3;5]$.

Уравнения, содержащие корни натуральной степени

Пример 77. *Решить уравнение*:

$$\sqrt{3+2\sin^2 x}=\sqrt{6}\cos 0{,}5x.$$

Решение. Данное уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases}\cos 0{,}5x \ge 0,\\ 3+2\sin^2 x = 6\cos^2 0{,}5x.\end{cases} \qquad (*)$$

Для решения уравнения, входящего в систему (∗), воспользуемся формулами

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \quad \text{и} \quad \sin^2\frac{x}{2}=1-\cos^2\frac{x}{2}.$$

Получим:

$$3+8\sin^2\frac{x}{2}x\cos^2\frac{x}{2}=6\cos^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+8\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)\cos^2 0{,}5x = 6\cos^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^4\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}-3=0.$$

Сделав замену $\cos^2\frac{x}{2}=t$, где $0\le t\le 1$, получим уравнение $8t^2-2t-3=0$. Данное уравнение имеет два корня: $t_1=\frac{3}{4}$ и $t_2=-\frac{1}{2}$. Заметим, что корень $t_2=-\frac{1}{2}$ не удовлетворяет условию $0\le t\le 1$. Возвращаясь к исходной системе, получим:

$$\begin{cases}\cos\frac{x}{2}\ge 0,\\ \cos^2\frac{x}{2}=\frac{3}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\frac{x}{2}\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2};\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+4\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Замечание. В данном примере при решении уравнения можно было бы поступить следующим образом

$$\cos^2 0{,}5x=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1+\cos x}{2}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Однако в этом случае пришлось бы отбирать корни, удовлетворяющие неравенству $\cos 0{,}5x\ge 0$.

Пример 78. *Решить уравнение*

$$\frac{2\sin^2 x+2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\sqrt{6x-x^2}}=0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases}2\sin^2 x+2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1=0,\\ 6x-x^2>0.\end{cases}$$

Решим вначале уравнение этой системы.

$$2\sin^2 x+2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1=0 \Leftrightarrow$$

$$2\sin^2 x+1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin 2x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cdot(\sin x-\cos x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x-\cos x=0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \operatorname{tg} x=1;\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x=\pi n, & n\in\mathbf{Z},\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k, & k\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Перейдем к решению неравенства:

$$6x-x^2>0 \Leftrightarrow x\cdot(6-x)>0 \Leftrightarrow 0<x<6.$$

Среди решений уравнения отберем те, которые принадлежат интервалу $(0;6)$.

Рассмотрим первую серию решений.

$$0<\pi n<6,\ n\in\mathbf{Z}, \Leftrightarrow 0<n<\frac{6}{\pi},\ n\in\mathbf{Z}, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=1.$$

Следовательно, интервалу $(0;6)$ принадлежит $x=\pi$.

Рассмотрим вторую серию решений.

$$0<\frac{\pi}{4}+\pi k<6,\ k\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<k<\frac{6}{\pi}-\frac{1}{4},\ k\in\mathbf{Z}.$$

Поскольку $1{,}25=\frac{6}{4}-\frac{1}{4}<\frac{6}{\pi}-\frac{1}{4}<\frac{6}{3}-\frac{1}{4}=$ $=1{,}75$, то условиям $-\frac{1}{4}<k<\frac{6}{\pi}-\frac{1}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$, удовлетворяют два значения: $k=0$ и $k=1$. Значит, интервалу $(0;6)$ принадлежат два решения из второй серии: $x_1=\frac{\pi}{4}$ и $x_2=\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$, π, $\frac{5\pi}{4}$.

Тренировочные упражнения

Решите уравнение:

129. $\sin\frac{x}{3}=\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2+x^2-25$.

130. $\sin 0{,}8x=\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2+x^2-3$.

131. $\sqrt{1-2\sin 3x\sin 7x}=\sqrt{\cos 10x}$.

132. $\sqrt{\sin 3x}=\sqrt{1+2\sin 4x\cos x}$.

133. $\dfrac{2\cos x-\sqrt{2}}{\sqrt{2\sin x-1}}=0$.

134. $\dfrac{2\sin x-\sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{tg} x-1}}=0$.

135. $\sin 3x(\sqrt{\cos x}-2)=0$.

136. Сколько различных корней имеет уравнение $(\cos^2 x-\sin^2 x)\sqrt{1-x^2}=0$?

137. Сколько различных корней имеет уравнение

$\sqrt{-x^2-21\pi x}(\sin 3x\cos 6x-\sin x\cos 8x)=0$?

Решите уравнение:

138. $\left(\cos x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{4x^2-7x+3}=0$.

139. $\left(\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{3x^2-7x+4}=0$.

140. $(\sin 2x)\cdot\sqrt{4-x^2}=0$.

141. $(\cos 3x-1)\cdot\sqrt{6+5x-x^2}=0$.

142. $\sqrt{\sin x}\cdot\cos x=0$.

143. $(2\sin x-1)(\sqrt{-\cos x}+1)=0$.

144. $(2\cos x+1)(\sqrt{-\sin x}-1)=0$.

145. $(2\cos^2 x-9\cos x+4)\sqrt{-2\operatorname{tg} x}=0$.

146. $(2\sin^2 x-9\sin x-5)\sqrt{11\operatorname{tg} x}=0$.

147. $\left(\sin\dfrac{x}{2}+\sin x+\sin\dfrac{3x}{2}+\sin 2x\right)\sqrt{\cos x}=0$.

148. $\left(\cos\dfrac{x}{2}+\cos x+\cos\dfrac{3x}{2}+\cos 2x\right)\sqrt{\sin x}=0$.

149. $\sqrt{\cos 2t-3\sin 2t}=\cos t$.

150. $\sqrt{5\sin 2t-\cos 2t}=\sin t$.

151. $\sqrt{5\cos x-\cos 2x}+2\sin x=0$.

152. $\sqrt{1+\dfrac{1}{\sin x}}=\operatorname{ctg} x$.

153. $\sqrt{\cos 2x+\sin 3x}=\sqrt{2}\cos x$.

154. $\sqrt{5\cos x-\cos 2x}=-2\sin x$.

155. $\sqrt{3+4\cos 2x}=\sqrt{2}\cos x$.

156. $\sqrt{5-2\sin x}=6\sin x-1$.

157. $\sin x+\cos x=\sqrt{1-2\sin^2 x}$.

158. $\sqrt{\cos 2x}=-\sqrt{2}\sin x$.

159. $\sqrt{1+3\sin x-\sin^2 x}=\cos x$.

160. $\sqrt{1-4\cos x-\cos^2 x}=\sin x$.

161. $\dfrac{2\cos^2 x-1}{(2\cos x-\sqrt{2})\sqrt{\sin x}}=0$.

162. $\dfrac{\cos 2x+\cos x}{1+\sqrt{\sin x}}=0$.

163. $\dfrac{\cos 2x-2+3\sin x}{1+\sqrt{\cos x}}=0$.

164. $\dfrac{2\sin^2 x-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)-1}{\sqrt{\sin x}}=0$.

165. $\dfrac{6\sin^2 x-5\sin x+1}{\sqrt{-\cos x}}=0$.

166. $\dfrac{6\cos^3 x+\cos^2 x-\cos x}{\sqrt{-\operatorname{ctg} x}}=0$.

167. $\dfrac{2\sin^3 x-3\sin^2 x+\sin x}{\sqrt{-\operatorname{tg} x}}=0$.

168. $\dfrac{2\cos^3 x + 3\cos^2 x + \cos x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} = 0$.

169. $\dfrac{\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x}{\sqrt{-\sin x}} = 0$.

170. $\dfrac{\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{\cos x}} = 0$.

171. $\dfrac{9^{\sin x} - 3}{\sqrt{-2\cos x}} = 0$. **172.** $\dfrac{9^{\cos x} - 3^{\sqrt{2}}}{\sqrt{-23\operatorname{tg} x}} = 0$.

173. $\dfrac{\sin 2x + 2\sin^2 x}{\sqrt{-\cos x}} = 0$.

174. $\dfrac{\sin 2x - 2\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}} = 0$.

175. $\dfrac{10\cos^2 x - \cos x - 3}{(5\sin x - 4)\sqrt{-\operatorname{tg} x}} = 0$.

176. $\dfrac{2\sin^2 x - 5\sin x - 3}{\sqrt{x + \dfrac{\pi}{6}}} = 0$.

177. $\dfrac{2\cos^2 x + 5\cos x - 3}{\sqrt{x - \dfrac{\pi}{3}}} = 0$.

178. $\dfrac{-4\sin^2 x + 8\cos x + 7}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} = 0$.

179. $\dfrac{4\cos^2 x - 8\sin x - 7}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0$.

180. $\dfrac{4\cos^2 x + 8\sin x - 7}{\sqrt{-\operatorname{tg} x}} = 0$.

181. $\dfrac{3\cos 2x + 7\cos x + 3}{\sqrt{-\sin x}} = 0$.

182. $\dfrac{4\cos x - 3}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0$.

183. $\dfrac{6\sin x + 5}{\sqrt{\cos x}} = 0$.

184. $\dfrac{(2y + 7\pi)(4y + 7\pi)(8y + 7\pi)}{\sqrt{\cos y}} = 0$.

185. $\dfrac{(2y + 9\pi)(4y - 9\pi)(13y - 9\pi)}{\sqrt{\cos y}} = 0$.

186. $-\sqrt{1 + \cos 2x} + 3\sqrt{\cos(x - \pi)} = \sqrt{2}$.

187. $\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}$.

188. $\cos\sqrt{2 - x^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

189. $\sin\sqrt{3 - x^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Уравнения, содержащие логарифмы

Пример 79. *Решить уравнение*

$$\log_2(\sin x) = \log_2(-\cos x).$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x = -\cos x, \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

Из уравнения системы получаем $\operatorname{tg} x = -1,\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Неравенству $\sin x > 0$ удовлетворяют числа $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Пример 80. *Решить уравнение*:

$$\log_2(-\sin x) + \log_2(\cos x) = -2$$

Решение. Данное уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} -\sin x > 0, \\ \cos x > 0, \\ \log_2(-\sin x \cos x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x > 0, \\ -\sin x \cos x = 0{,}25. \end{cases}$$

Решим уравнение этой системы:

$$-\sin x\cos x = 0{,}25 \Leftrightarrow \sin 2x = -0{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \\ 2x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Функции $\sin x$, $\cos x$ и $\sin 2x$, входящие в уравнение имеют общий наименьший положительный период 2π. Для отбора корней используем тригонометрический круг (см. рис. 25).

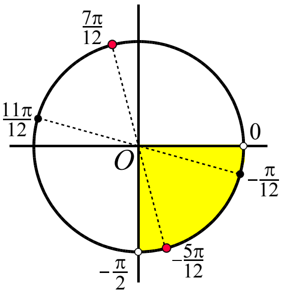

Рис. 25

Условиям $\sin x < 0$ и $\cos x > 0$ удовлетворяет совокупность значений x, принадлежащих четвертой координатной четверти. Тогда решения исходного уравнения можно записать следующим образом:

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{12} + 2\pi n$; $-\dfrac{5\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 81. *Решить уравнение*

$$\frac{(2\cos x + 1)\log_{13}(3\mathrm{tg}^2 x)}{\log_{31}(2\sin x)} = 0.$$

Решение. Из данного уравнения получаем два уравнения $\cos x = -0{,}5$ или $\mathrm{tg}x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ при условии

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{tg}x \neq 0, \\ \sin x > 0, \\ \sin x \neq 0{,}5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin x > 0, \\ \sin x \neq 0{,}5. \end{array}\right.$$

Решая уравнения, получаем

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k, \end{array}\right. \quad n, k \in \mathbf{Z}$$

с ограничениями

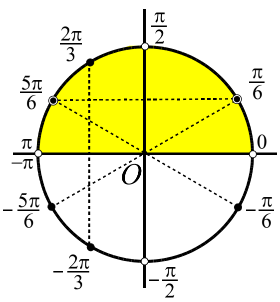

Рис. 26

$$\left\{\begin{array}{l} \sin x > 0, \\ x \neq (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi m, \end{array}\right.$$

$m \in \mathbf{Z}$.

Так как тригонометрические функции ($\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}x$), входящие в данное уравнение, имеют общий наименьший положительный период 2π, то изобразим (см. рис. 26) множество решений на числовой окружности, выделив промежуток $[-\pi; \pi)$.

Используя рисунок, получаем ответ.

Ответ: $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Тренировочные упражнения

Решите уравнение:

190. $\log_3(\cos x) = \log_3(-\sin x)$.

191. $\log_{\sqrt{3}}(2\sin^2 x - 1) = \log_{\sqrt{3}} \sin x$.

192. $\log_{\sqrt{5}} \cos x = \log_{\sqrt{5}}(1 - 2\cos^2 x)$.

193. $\log_{\cos x} \sin x = 1$.

194. $\log_{\sin x} \sqrt{3}\cos x = 1$.

195. $\log_3 \sin x + \log_3 \cos x = \log_3(1 - \cos 60°)$.

196. Сколько различных корней имеет уравнение $(\sin \pi x + 1)\log_{0,5}(1 - x^2) = 0$?

Решите уравнение:

197. $(2\cos^2 x - 7\cos x + 3)\log_{41}(-\sin x) = 0$.

198. $(2\sin^2 x - 7\sin x + 3)\log_{14}(-\cos x) = 0$.

199. $\dfrac{\log_2(2\sin x)}{\sqrt{-3\cos x}} = 0$.

200. $\dfrac{\log_5(-2\cos x)}{\sqrt{5\mathrm{tg}\, x}} = 0$.

201. $\dfrac{\log_7(\sqrt{3}\mathrm{tg}\, x)}{\sqrt{-7\sin x}} = 0$.

202. $\dfrac{\cos x(2\cos x - 1)(2\cos x - \sqrt{3})}{\log_6(\sqrt{3}\mathrm{tg}\, x)} = 0$.

203. $\dfrac{\sin x(2\sin x + 1)(\sqrt{2}\sin x - 1)}{\lg(\mathrm{tg}\, x)} = 0$.

204. $\dfrac{(\mathrm{tg}x + \sqrt{3})\log_{13}(2\sin^2 x)}{\log_{31}(\sqrt{2}\cos x)} = 0$.

205. $\dfrac{(2\cos x + 1)\log_{13}(3\mathrm{tg}^2 x)}{\log_{31}(2\sin x)} = 0$.

Уравнения, содержащие модули

Пример 82. *Решить уравнение*

$$|\cos x| = \sqrt{3}\sin x .$$

Решение. Из данного уравнения получаем равносильную систему

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = \sqrt{3}\sin x, \\ \cos x = -\sqrt{3}\sin x, \end{array}\right. \\ \sin x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}, & n \in \mathbf{Z}, \\ \sin x \ge 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n, & n \in \mathbf{Z} \\ \sin x \ge 0, \end{cases}$$

.

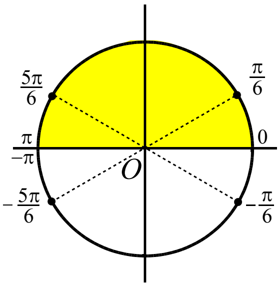

Рис. 27

Так как функции $\mathrm{tg}x$ и $\sin x$ имеют общий наименьший положительный период 2π, то отбор корней проведем на тригонометрическом круге (см. рис. 27).

$$\textbf{\textit{Ответ}}: \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 83. *Решить уравнение*

$$|\cos x| = \cos x + 2\sin x .$$

Решение. Рассмотрим две области на числовой прямой, на которых $\cos x \ge 0$ и $\cos x < 0$.

1. Пусть $\cos x \ge 0$, тогда данное уравнение принимает вид:

$$\cos x = \cos x + 2\sin x \;\Leftrightarrow\; \sin x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \pi n,\; n \in \mathbf{Z}.$$

Условию $\cos x \ge 0$ удовлетворяют только значения $x = 2\pi n,\; n \in \mathbf{Z}.$

2. Для условия $\cos x < 0$ исходное уравнение перепишем так:

$$-\cos x = \cos x + 2\sin x \;\Leftrightarrow\; \sin x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow\; \mathrm{tg}x = -1 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\; k \in \mathbf{Z}.$$

Условию $\cos x < 0$ удовлетворяют только значения $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\; k \in \mathbf{Z}.$

$$\textbf{\textit{Ответ}}: 2\pi\, n,\; n \in \mathbf{Z};\; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\; k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 84. *Решите уравнение*

$$7|\cos x| - 4\cos x = 3|\sin x| + 2\sin x..$$

Решение. Рассмотрим значения синуса и косинуса по четвертям координатной окружности.

Первая четверть:

$$3\cos x = 5\sin x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{tg}x = \frac{3}{5} \;\Leftrightarrow$$

$$x = \mathrm{arctg}\frac{3}{5} + 2\pi k,\; k \in \mathbf{Z}.$$

Вторая четверть:

$$-11\cos x = 5\sin x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{tg}x = -\frac{11}{5} \;\Leftrightarrow$$

$$x = \pi - \mathrm{arctg}\frac{11}{5} + 2\pi l,\; l \in \mathbf{Z}.$$

Третья четверть:

$$-11\cos x = -\sin x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{tg}x = 11 \;\Leftrightarrow$$

$$x = \pi + \mathrm{arctg}11 + 2\pi m,\; m \in \mathbf{Z}.$$

Четвертая четверть:

$$3\cos x = -\sin x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{tg}x = -3 \;\Leftrightarrow$$

$$x = -\mathrm{arctg}3 + 2\pi n,\; n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\mathrm{arctg}\dfrac{3}{5} + 2\pi k,\quad \pi - \mathrm{arctg}\dfrac{11}{5} + 2\pi l,$ $\pi + \mathrm{arctg}11 + 2\pi m,\quad -\mathrm{arctg}3 + 2\pi n,$ где $k, l, m, n \in \mathbf{Z}.$

Пример 85. (ЕГЭ 2005). *Решить уравнение*

$$\sqrt{(3\sin 0{,}25x - 4)^2} - \sqrt{\sin^2 0{,}25x - 6\sin 0{,}25x + 9} = 1 - \sqrt{2} .$$

Решение. Имеем

$$|4 - 3\sin 0{,}25x| - |3 - \sin 0{,}25x| = 1 - \sqrt{2} .$$

Так как $4 - 3\sin 0{,}25x > 0,$ $3 - \sin 0{,}25x > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$, то получаем

$$1 - 2\sin 0{,}25x = 1 - \sqrt{2};\;\; \sin 0{,}25x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x = (-1)^n \pi + 4\pi n,\; n \in \mathbf{Z} .$$

$$\textbf{\textit{Ответ}}: (-1)^n \pi + 4\pi n,\; n \in \mathbf{Z} .$$

Тренировочные упражнения

Решите уравнение:

206. $|\sin x|+\sqrt{3}\cos=0$.

207. $|\sin x|=\sin x\cos x$.

208. $\cos x+\cos 3x=|\sin 2x|$.

209. $\sin x-\sin 3x=|\cos 2x|$.

210. $|\sin 2x|=\cos x$.

211. $\operatorname{ctg} x|\sin x|=0{,}5$.

212. $|\cos x|-\cos x=2\sin x$.

213. $4|\sin x|+2\cos 2x=3$.

214. $\dfrac{\sin 2x}{|\cos x|}=2\sin x-2$.

215. Найдите все решения уравнения $\sin 2x=\cos x|\cos x|$ из промежутка $[0;2\pi]$.

216. Решите уравнение:

$$\left|\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

217. Найдите все решения уравнения

$$\left|\cos x-\frac{1}{4}\right|=8\cos^2\frac{x}{2}-5$$

на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Решите уравнение:

218. $\sqrt{(3\cos 0{,}5x-4)^2}-$

$-\sqrt{\cos^2 0{,}5x-6\cos 0{,}5x+9}=1$.

219. $\sqrt{(3\sin x-4)^2}+$

$+\sqrt{\sin^2 x-6\sin x+9}=7+2\sqrt{3}$.

220. $\sqrt{(2\sin 0{,}2x-3)^2}-$

$-\sqrt{\sin^2 0{,}2x-2\sin 0{,}2x+1}=2$.

221. $2|\cos x|-3\cos x-4|\sin x|-5\sin x=0$.

222. $4|\cos x|+6\cos x-5|\sin x|+3\sin x=0$.

2.6. Системы уравнений

Пример 86. (ЕГЭ 2010, С1). *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{49}\right)^{\operatorname{tg} x}-14\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\operatorname{tg} x}+49=0,\\ 3\sqrt{y}\ \operatorname{tg} x-5\sqrt{2}\cos x=0.\end{cases}$$

Решение. Заметим, что левая часть первого уравнения системы представляет полный квадрат:

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{\operatorname{tg} x}-14\left(\frac{1}{7}\right)^{\operatorname{tg} x}+49=$$

$$=\left(\frac{1}{7}\right)^{2\operatorname{tg} x}-14\left(\frac{1}{7}\right)^{\operatorname{tg} x}+49=\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{\operatorname{tg} x}-7\right)^2.$$

Равенство нулю возможно, если $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\operatorname{tg} x}-7=0$, т.е. $7^{-\operatorname{tg} x}=7$. Отсюда получаем $\operatorname{tg} x=-1$. Тогда $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Рассмотрим второе уравнение системы. Запишем его в виде $\sqrt{y}=\dfrac{5\sqrt{2}\cos x}{3\operatorname{tg} x}$.

Так как правая часть этого уравнения должна быть неотрицательна и, учитывая, что $\operatorname{tg} x=-1$, получаем, что $\cos x<0$ (см. рис. 28). Тогда из множества решений $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$, выбираем значения, лежащие во второй четверти, т.е. $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$.

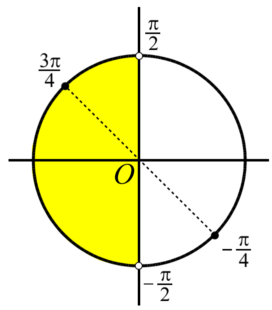

Рис. 28

В этом случае $\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и

$$\sqrt{y}=\frac{5\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{3(-1)}=\frac{5}{3}.\ \text{Отсюда}\ y=\frac{25}{9}.$$

Ответ. $\left(\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n, \dfrac{25}{9}\right)$, $n\in\mathbf{Z}$.

Пример 87. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases}\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{\sqrt{y}}=0,\\ y-\cos x=0.\end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения системы следует $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$ и $y>0$. Пусть $\sin x=t$, где $-1\le t\le 1$. Из уравнения $2t^2-3t+1=0$ получаем корни $t_1=1$, $t_2=\dfrac{1}{2}$, которые удовлетворяют условию $-1\le t\le 1$.

а) Если $\sin x=1$, то $\cos x=0$ и из второго уравнения системы имеем $y=0$. Это значение не удовлетворяет условию $y>0$.

б) Пусть $\sin x=\dfrac{1}{2}$, тогда из тождества $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ получаем $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ или $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (не удовлетворяет условию $y>0$).

Из уравнения $\sin x=\dfrac{1}{2}$ имеем $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Таким образом, исходная система имеет решения $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Тренировочные упражнения

Решите систему уравнений:

223. $\begin{cases}(2x^2-5x-3)\sqrt{\cos y}=0,\\ \sin y=x.\end{cases}$

224. $\begin{cases}3^x+2\sin y=0,\\ 4\cos^2 y-4\cos y-3=0.\end{cases}$

225. $\begin{cases}\cos 2y=\cos y,\\ \sqrt{x^2-2x}=2\sin y.\end{cases}$

226. $\begin{cases}4^y-10\cdot 2^y+16=0,\\ \cos x=\sqrt{y-2}.\end{cases}$

227. $\begin{cases}16^{\cos x}-10\cdot 4^{\cos x}+16=0,\\ \sqrt{y}+2\sin x=0.\end{cases}$

Ответы

3. а) $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; **б)** $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{5\pi}{6}$; **в)** $-\dfrac{7\pi}{6}$; $\dfrac{\pi}{6}$; **г)** $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{5\pi}{6}$; $\dfrac{13\pi}{6}$; $\dfrac{17\pi}{6}$.

4. а) $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; **б)** $\dfrac{2\pi}{3}$; **в)** $-\dfrac{4\pi}{3}$; $-\dfrac{2\pi}{3}$; **г)** $\dfrac{2\pi}{3}$; $-\dfrac{4\pi}{3}$; $-\dfrac{2\pi}{3}$; $\dfrac{2\pi}{3}$; $\dfrac{4\pi}{3}$; $\dfrac{8\pi}{3}$.

5. а) $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; **б)** $\dfrac{2\pi}{3}$.

6. а) $(-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$; **б)** $\dfrac{\pi}{12}$; $\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{3\pi}{4}$; $\dfrac{11\pi}{12}$; $\dfrac{17\pi}{12}$; $\dfrac{19\pi}{12}$. **7. а)** $\pm\dfrac{\pi}{12}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; **б)** $-\dfrac{\pi}{12}$; $-\dfrac{11\pi}{12}$; $\dfrac{\pi}{12}$; $\dfrac{11\pi}{12}$. **8. а)** $\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; **б)** $-\dfrac{5\pi}{3}$; $\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{7\pi}{3}$. **9.** $-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ **10.** $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **11. а)** $\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$; **б)** $\dfrac{4\pi}{9}$; $\dfrac{7\pi}{9}$. **12.** $\dfrac{3\pi}{2}+6\pi n$, $\dfrac{7\pi}{2}+6\pi$, $n\in\mathbf{Z}$. **13.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **14.** $-\dfrac{\pi}{3}$. **15.** $-1\dfrac{19}{30}$; $-\dfrac{19}{30}$; $\dfrac{11}{30}$. **16.** $-\dfrac{7\pi}{8}$, $-\dfrac{3\pi}{4}$, $-\dfrac{3\pi}{8}$, $-\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{8}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{8}$, $\dfrac{3\pi}{4}$. **17.** $-\dfrac{17\pi}{9}$, $-\dfrac{5\pi}{3}$, $-\dfrac{11\pi}{9}$, $-\pi$, $-\dfrac{5\pi}{9}$, $-\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{9}$, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{7\pi}{9}$. **18.** $-\dfrac{7\pi}{4}$, $-\dfrac{3\pi}{4}$, $-\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}$. **19.** 0; $-\dfrac{5\pi}{9}$.

20. $-\dfrac{25\pi}{24}$, $\dfrac{35\pi}{24}$. **21.** $-\dfrac{\pi}{4}\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **22.** $-\dfrac{\pi}{3}\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **23. а)**

$-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4},\ n\in\mathbf{Z}$; **б)** $-\frac{7\pi}{24}$; $-\frac{\pi}{24}$; $\frac{5\pi}{24}$; $\frac{11\pi}{24}$. 24. 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; π. **25.** $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{3}$. **26.** $\frac{\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}$. **27.** -2π; $-\frac{4\pi}{3}$; 0; $\frac{2\pi}{3}$; 2π; $\frac{8\pi}{3}$.

28. $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{23\pi}{6}$.

29. $(-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

30. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

31. $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{5\sqrt{2}}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

32. $\operatorname{arctg}2+\pi n;\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k,\ n,k\in\mathbf{Z}$.

33. $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi k,\ n,k\in\mathbf{Z}$.

34. $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi k,\ n,k\in\mathbf{Z}$.

35. $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi k,\ n,k\in\mathbf{Z}$.

36. $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi k,\ n,\ k\in\mathbf{Z}$.

37. $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ -2\operatorname{arctg}2+2\pi n,\ k,n\in\mathbf{Z}$.

38. $-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **39.** $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ k,n\in\mathbf{Z}$. Отрезку $[-\pi;2\pi]$ принадлежат корни: $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$.

40. $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ k,n\in\mathbf{Z}$. Отрезку $[-\pi;2\pi]$ принадлежат корни: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$.

41. а) $\pi+2\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{4\pi}{3}+2\pi m,\ k,n,m\in\mathbf{Z}$; **б)** π, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$, π. **42. а)** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\operatorname{arctg}3+\pi n,\ k,n\in\mathbf{Z}$; **б)** $\operatorname{arctg}3-\pi$, $-\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}3$. **43. а)** $-\operatorname{arctg}2+\pi k,\ -\operatorname{arctg}3+\pi n,\ k,n\in\mathbf{Z}$; **б)** $-\pi-\operatorname{arctg}2$, $-\pi-\operatorname{arctg}3$.

44. а) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \pi n-\operatorname{arctg}5,\ k,n\in\mathbf{Z}$; **б)** $\frac{9\pi}{4}$, $3\pi-\operatorname{arctg}5$, $\frac{13\pi}{4}$. **45. а)** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ k,n\in\mathbf{Z}$; **б)** $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi$, $\frac{11\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+3\pi$. **46.** $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$.

47. $\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

48. $\frac{\pi}{32}+\frac{\pi n}{8},\ \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n\in\mathbf{Z}$. **49.** $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ n\in\mathbf{Z}$. **50.** 405°. **51.** 390°.

52. $-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **53.** $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k,n\in\mathbf{Z}$. **54.** $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **55.** $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k,n\in\mathbf{Z}$.

56. $\frac{5\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$. **57.** $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $\frac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k,n\in\mathbf{Z}$. **58.** $\pi+2\pi n$, $\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k,n\in\mathbf{Z}$. **59.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ k,n\in\mathbf{Z}$. **60.** $\pi+2\pi n$, $\frac{4\pi}{3}+2\pi k,\ k,n\in\mathbf{Z}$. **61.** $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

62. $\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **63.** $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

64. $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5},\ k\in\mathbf{Z}$. **65.** $\frac{\pi k}{5},\ k\in\mathbf{Z}$.

66. $-1{,}25\pi$, $-\pi$, $-0{,}75\pi$, 0, $0{,}75\pi$, π, $1{,}25\pi$. **67.** 0; 2. **68.** –2; 0,5; 2.

69. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi n$, $k,n\in\mathbf{Z}$; **б)** $\frac{\pi}{2}$, $\pi-\arccos\frac{1}{4}$, $\pi+\arccos\frac{1}{4}$.

70. а) $\arcsin\frac{2}{3}+2\pi k$; $\pi-\arcsin\frac{2}{3}+2\pi k$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$. **б)** $\frac{2\pi}{3}$; $\pi-\arcsin\frac{2}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$. **71. а)** $2\pi k$, $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$,

$-\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ k,n,m\in\mathbf{Z}$. **б)** $-2\pi,\ -\frac{5\pi}{6}$.

72. **а)** $\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ n\in\mathbf{Z}$; **б)** $\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{10}$; $\frac{9\pi}{10}$; π. **73.** **а)** $\frac{\pi k}{6},\ \frac{\pi n}{2},\ k,n\in\mathbf{Z}$; **б)** $-\frac{\pi}{6}$; 0; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$. **74.** $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7},\ n\in\mathbf{Z}$.

75. $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **76.** **а)** $\frac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}$; **б)** 0; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; 2π. **77.** **а)** $\frac{2\pi n}{9},\ n\in\mathbf{Z}$; **б)** 0; $\frac{2\pi}{9}$; $\frac{4\pi}{9}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{9}$. **78.** $-\frac{7\pi}{6}$. **79.** $-\frac{7\pi}{3}$.

80. $\pi+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$. **81.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

82. 0. **83.** 0. **84.** 3. **85.** –2. **86.** 2π. **87.** $\frac{\pi}{2}$.

88. 3. **89.** –2. **90.** 2. **91.** π. **92.** $-\frac{\pi}{2}$. **93.** 0; 1.

94. 0. **95.** –0,5; 0,9. **96.** 2. **97.** –2. **98.** 2π.

99. 3π. **100.** $\frac{1}{4}$. **101.** –1. **102.** $2-\sqrt{7}$; $2+\sqrt{7}$; -1; -3. **103.** $2-\sqrt{7}$; $2+\sqrt{7}$; -1; -3. **104.** $\pi t,\ t\in\mathbf{Z}$. **105.** 4. **106.** $\pi+6\pi n$, $5\pi+6\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **107.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

108. $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ k,n\in\mathbf{Z}$. **109.** πk, $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ k,n\in\mathbf{Z}$. **110.** $\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. **111.** $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ -\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ k,n\in\mathbf{Z}$.

112. $\pi k,\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

113. $\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \pi+2\pi k,\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

114. $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbf{Z}$. **115.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ k,n\in\mathbf{Z}$. **116.** $\frac{\pi n}{6},\ n\in\mathbf{Z}$, где $n\neq 3+6k,\ k\in\mathbf{Z}$. **117.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

118. $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **119.** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **120.** $2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **121.** $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z},\ n\neq 0$. **122.** $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}$.

123. $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

124. $\pi-\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

125. $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}$.

126. $\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

127. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **128.** 8. **129.** 0.

130. $\frac{5\pi}{8}$. **131.** $\pi k;\ k\in\mathbf{Z}$. **132.** $\frac{3\pi}{10}+2\pi k$, $\frac{7\pi}{10}+2\pi n,\ \frac{3\pi}{2}+2\pi m,\ n,k,m\in\mathbf{Z}$.

133. $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **134.** $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

135. $\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. **136.** 4.

137. 127. **138.** $\frac{3}{4}$, 1, $-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n,k\in\mathbf{Z},\ n\neq 0$. **139.** 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n,k\in\mathbf{Z},\ n\neq 0$. **140.** -2; 2; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; 0. **141.** -1; 6; 0; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$. **142.** πk, $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ k,n\in\mathbf{Z}$. **143.** $\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

144. $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ k,n\in\mathbf{Z}$.

145. $\pi k,\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ k,n\in\mathbf{Z}$. **146.** πk, $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ k,n\in\mathbf{Z}$. **147.** $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ 2\pi m$, $\pm\frac{2\pi}{5}+2\pi(2n+1),\ k,m,n\in\mathbf{Z}$.

148. $\frac{2\pi}{5}+4\pi k,\ \pi m,\ \frac{4\pi}{5}+2\pi(2n+1)$, $k,m,n\in\mathbf{Z}$. **149.** $2\pi n,\ -\operatorname{arctg}6+2\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$. **150.** $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \operatorname{arctg}0{,}1+2\pi k$,

$n, k \in \mathbf{Z}$. **151.** $-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

152. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

153. $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n,\quad k, n \in \mathbf{Z}$.

154. $-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

155. $\pm \arccos\frac{\sqrt{6}}{6}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

156. $(-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

157. $2\pi k, -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ k, n \in \mathbf{Z}$.

158. $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **159.** $2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

160. $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **161.** $\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

162. $\pi+2\pi k,\ \frac{\pi}{3}+2\pi n,\ k, n \in \mathbf{Z}$.

163. $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ k, n \in \mathbf{Z}$.

164. $\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **165.** $\frac{5\pi}{6}+2\pi n,$ $\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n;\ n \in \mathbf{Z}$. **166.** $\frac{2\pi}{3}+2\pi n,$ $-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **167.** $\frac{5\pi}{6}+2\pi n,$ $n \in \mathbf{Z}$. **168.** $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

169. $-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ k, n \in \mathbf{Z}$.

170. $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. **171.** $\frac{5\pi}{6}+2\pi k,$ $k \in \mathbf{Z}$. **172.** $-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

173. $\pi+2\pi k,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ k, n \in \mathbf{Z}$.

174. $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad k, n \in \mathbf{Z}$.

175. $\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ -\arccos\frac{3}{5}+2\pi n,\quad k, n \in \mathbf{Z}$.

176. $-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k \in \mathbf{N}$.

177. $-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k \in \mathbf{N}$.

178. $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. **179.** $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,$ $k \in \mathbf{Z}$. **180.** $\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. **181.** $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **182.** $\arccos\frac{3}{4}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

183. $-\arcsin\frac{5}{6}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

184. $-\frac{7\pi}{4}$. **185.** $\frac{9\pi}{4}$. **186.** $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n;$ $n \in \mathbf{Z}$. **187.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

188. $\pm\sqrt{2-\frac{\pi^2}{36}}$. **189.** $\pm\frac{\sqrt{27-\pi^2}}{3}$.

190. $-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. **191.** $\frac{\pi}{2}+2\pi n,$ $n \in \mathbf{Z}$. **192.** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

193. $\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. **194.** $\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

195. $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **196.** 2.

197. $-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad -\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

198. $\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \pi+2\pi n;\ n \in \mathbf{Z}$.

199. $\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **200.** $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,$ $n \in \mathbf{Z}$. **201.** $\frac{7\pi}{6}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

202. $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n \in \mathbf{Z}$. **203.** $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n,$ $n \in \mathbf{Z}$. **204.** $-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

205. $\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\quad n \in \mathbf{Z}$. **206.** $\frac{2\pi}{3}+2\pi n,$ $\frac{4\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **207.** $\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

208. $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ n, k \in \mathbf{Z}$.

209. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\quad -\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{6}+2\pi m,$

$n,k,m \in \mathbf{Z}$. **210.** $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $n,\ k \in \mathbf{Z}$. **211.** $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{\pi}{3}+2\pi n$, $k,n \in \mathbf{Z}$. **212.** $2\pi k,\ -\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ k,n \in \mathbf{Z}$.

213. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **214.** $\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

215. $\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2},\ \pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

216. $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **217.** $\pm\arccos\frac{1}{4}$.

218. $\pi+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. **219.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **220.** $5\pi n;\ n \in \mathbf{Z}$. **221.** $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $\pi-\operatorname{arctg}\frac{5}{9}+2\pi n,\quad n,k \in \mathbf{Z}$.

222. $-\operatorname{arctg}\frac{5}{4}+2\pi n,\quad \operatorname{arctg}5+2\pi k$, $n,\ k \in \mathbf{Z}$. **223.** $\left((-1)^n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$; $\left(-\frac{1}{2};-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right),\ k \in \mathbf{Z}$.

224. $\left(\frac{1}{2};-\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$.

225. $(0;2\pi n)$; $(2;2\pi n)$. $\left(3;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$; $\left(-1;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$. **226.** $(2\pi n;3)$, $n \in \mathbf{Z}$. **227.** $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;3\right),\ \ n \in \mathbf{Z}$.

Список и источники литературы

1. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Контрольные работы. Профильный уровень. Глизбург В.И. – М.: Мнемозина, 2009. – 39 с.

2. Денищева Л.О., Глазков Ю.А., Краснянская К.А., Рязановский А.Р., Семенов П.В. Единый государственный экзамен 2008. Математика. Учебно-тренировочные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2007.

3. ЕГЭ-2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2011. – 192 с. (ЕГЭ-2012. ФИПИ – школе).

4. ЕГЭ-2011. Математика: типовые экзаменационные варианты: 10 вариантов / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2010.

5. ЕГЭ 2012. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2012. – 51 с.

6. Единый государственный экзамен 2011. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2011.

7. Задачи письменного экзамена по математике за курс средней школы. Условия и решения. Вып. 1-6, 8, 12, 14, 18, 25. – М.: Школьная Пресса, – (Библиотека журнала «Математика в школе»), 1993-2003.

8. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Математика ЕГЭ 2011. Типовые задания С1. Отбор корней в тригонометрических уравнениях. http://alexlarin.net/ege/2011/C12011.pdf

9. Самое полное издание типовых вариантов заданий ЕГЭ: 2012: Математика / авт.-сост. И.Р. Высоцкий, Д.Д. Гущин, П.И. Захаров и др.; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2011. – 93 с. (Федеральный институт педагогических измерений).

10. Шестаков С.А., Захаров П.И. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С1 / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011.

11. www.alexlarin.narod.ru – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.

12. http://eek.diary.ru/ – сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.

13. www.egemathem.ru – единый государственный экзамен (от А до Я).