ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОДСТАНОВКИ

Математика является одной из самых древних наук. Она зародилась на заре человеческой цивилизации под влиянием потребностей практики. Строительство, измерение площадей земельных участков, навигация, торговые расчеты, управление государством требовали умения производить арифметические вычисления и определенных геометрических знаний. Как заметил выдающийся русский математик и кораблестроитель академик А. Н. Крылов: «Человек обращается к математике, не, чтобы любоваться неисчислимыми сокровищами. Ему, прежде всего, нужно ознакомиться со столетиями испытанными инструментами и искусно владеть».

Естественно, каждый из нас умеет «правильно и искусно» обращаться с такими математическими инструментами, как функции и их графики, производная и интеграл. Также, каждый современный человек умеет решать неравенства и, конечно, уравнения.

В своем докладе я уделю больше всего внимания именно уравнениям. И они это действительно «заслужили». Ведь правда — ни одну математическую, порой и житейскую, более или менее сложную задачу, невозможно решить, не прибегнув к помощи уравнения. Ну, а методов решения уравнений существует бесчисленное множество.

Например, уравнение такого сорта: $\sqrt{7-x}=2$ можно решить, как минимум тремя способами:
1) возвести обе части в квадрат (отметив, что $2>0$);
2) методом монотонности: $\sqrt{7-x}$ убывает, 2 – постоянное число, следовательно, уравнение имеет не более одного решения, $x=3$ – корень;
3) методом исследования области допустимых значений уравнения ($x\le 7$), а потом просто угадать корень, подстановкой проверив, что он правильный.

Конечно, каждый вид уравнений решается наиболее подходящим и простым способом. Но как же выдрать, а главное, правильно применить тот или иной метод решения? Мне кажется, что это личное дело каждого, но я хочу предложить один оригинальный способ решения некоторых уравнений.

Как бы вы стали решать данное уравнение: $\sqrt{1-x^2}=x$? Скорее всего, вы бы написали следующее:

$$\begin{cases} x\ge 0, \\ 1-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ x^2=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Но это уравнение можно решить совсем по-другому:

Пусть $x=\sin\alpha$, тогда $x\in[-1;1]$. Отсюда мы имеем: $1-x^2=\cos^2\alpha$.

Таким образом:

$$\sqrt{\cos^2\alpha}=\sin\alpha \Leftrightarrow |\cos\alpha|=\sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha=\pm\dfrac{\pi}{4}, \\ \alpha=\pm\dfrac{3\pi}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Конечно, соотносительно этого уравнения, первый способ более простой и кратчайший, но, при решении следующего уравнения, рациональнее пользоваться методом подстановки тригонометрических функций: $(\sqrt{1-x^2}+x)^2=1+2x\sqrt{1-x^2}$. Другие способы здесь или бессильны, или приводят в тупик после продолжительных вычислений.

Итак: пусть $x=\sin\alpha$, $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha \Leftrightarrow (\cos\alpha+\sin\alpha)^2=1+\sin 2\alpha,$$

но, как мы знаем из курса тригонометрии, это тождество. Таким образом, ответ: $[-1;1]$.

Существует ряд уравнений, которые можно успешно решать методом тригонометрической замены.

Вот одно из таких уравнений: $\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2=\frac{1}{x^2}-\frac{\sqrt{4}}{2}$. В данном случае его можно решить, приведя к общему знаменателю:

$$\begin{cases}(\sqrt{1-x^2})^2=1-\frac{\sqrt{4}}{2}x^2,\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|1-x^2|=1-x^2,\\ x\neq 0\end{cases}$$

и получить ответ: $[-1;1]\setminus\{0\}$.

Но можно использовать метод тригонометрической замены:
Пусть $x=\sin\alpha$, $x\neq 0$.

$$\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}-1 \Leftrightarrow \operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}-1 \Leftrightarrow \alpha\neq\pi k : k\in\mathbb{Z}.$$

Получаем ответ: $[-1;1]\setminus\{0\}$.

Но, к сожалению, встречаются уравнения, которые другими способами, отличными от метода тригонометрической подстановки не решаются, или же это решение будет сложным и трудоемким. Вот одна из таких задач: $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$. Конечно, данный пример можно разрешить, возведя в квадрат, не забыв про условие. Но тогда получится уравнение шестой степени, которое решается не совсем просто. Легче сделать так:
Пусть $x=\cos\alpha$, $\alpha\in[0;\pi]$.

$$\sqrt{\cos^2\alpha-1}=4\cos^3 x-3\cos\alpha \Leftrightarrow |\sin\alpha|=\cos 3\alpha \underset{\sin\alpha\geq 0}{\Rightarrow} \sin\alpha=\cos 3\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}: k\in\mathbb{Z},\\ \alpha=\frac{3\pi}{4}+\pi n : n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Лишь три значения удовлетворяют условию $0\leq x\leq\pi$: $\alpha=\frac{\pi}{8}$, $\alpha=\frac{5\pi}{8}$, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$. Поэтому

$$x_1=\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},\ x_2=\cos\frac{5\pi}{8}=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\ x_3=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right\}$.

В дополнение к вышесказанному я приведу еще один пример использования метода тригонометрической замены.

Решить уравнение: $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$.

Пусть $x=\cos\alpha$, $\alpha\in[0;\pi]$; $\sin\dfrac{\alpha}{2}\geq 0$, $\sin\alpha\geq 0$.

$$\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}=\cos 2\alpha+\sin 2\alpha \Leftrightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{4\pi k}{3}: k\in\mathbb{Z}, \\ \alpha=\dfrac{3\pi}{10}+\dfrac{4\pi n}{5}: n\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Учитывая условия, наложенные на α , получим лишь один корень: $\alpha=\dfrac{3\pi}{10}$. Итак, $x=\cos\dfrac{3\pi}{10}$.

Ответ: $\left\{\cos\dfrac{3\pi}{10}\right\}$.

Это пример того, как относительно сложная задача решается в несколько действий с помощью специальных методов решения.

Не только уравнения можно решать рассматриваемым нами методом. Определить все тройки действительных чисел $(x;\, y;\, z)$, которые удовлетворяют системе $\begin{cases} 2x+x^2y=y, \\ 2y+y^2z=z, \\ 2z+z^2x=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2x}{1-x^2}, \\ z=\dfrac{2y}{1-y^2}, \\ x=\dfrac{2z}{1-z^2}. \end{cases}$

Пусть $x=\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

Учитывая, что $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ получаем

$$x=\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow y=\operatorname{tg}2\alpha \Rightarrow z=\operatorname{tg}4\alpha \Rightarrow x=\operatorname{tg}8\alpha .$$

Итак $\operatorname{tg}8\alpha=\operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{\pi n}{7}: n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{\operatorname{tg}\dfrac{\pi n}{7};\, \operatorname{tg}\dfrac{2\pi n}{7};\, \operatorname{tg}\dfrac{4\pi n}{7}: n\in\mathbb{Z}\right\}$.