ОКРУЖНОСТИ И ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

Задача 1. В параллелограмм можно вписать окружность. Найдите ее радиус, если известно, что радиус окружности, описанной около него, равен $\sqrt{2}$.

Задача 2. Диагонали ромба равны a и b. Найдите радиус вписанной в ромб окружности.

Задача 3. В ромб, диагонали которого равны $\sqrt{3}+1$ и $\sqrt{3}-1$, вписана окружность. Точки касания окружности со сторонами ромба последовательно соединены. Найдите площадь получившегося четырехугольника.

Задача 4. В ромб, диагонали которого равны 12 и 16, вписана окружность. Найдите расстояние от точки касания окружности со стороной ромба до меньшей диагонали.

Задача 5. Сторона ромба равна 10 см, диагональ — 16 см. К окружности, вписанной в ромб, проведена касательная, параллельная его меньшей диагонали. Найдите длину отрезка касательной, заключенной между сторонами ромба.

Задача 6. Равнобедренная трапеция $ABCD$ описана около окружности с центром O и радиусом r. Известно, что $|AO| = a$. Найдите расстояние от точки O до остальных вершин.

Задача 7. Определите боковую сторону равнобокой трапеции, описанной около окружности, если острый угол при основании трапеции равен $60°$, а ее площадь — $288\sqrt{3}$.

Задача 8. Найдите площадь трапеции с острым углом α, если радиус описанной окружности равен R, а m — средняя линия трапеции.

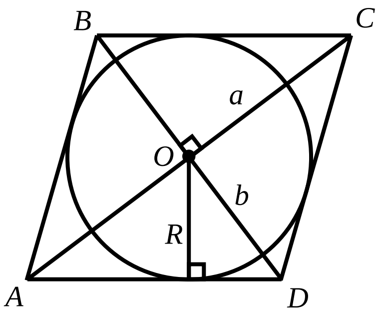
Задача 9. Около окружности радиуса R описана прямоугольная трапеция площади S. Вычислите острый угол трапеции.

Задача 10. Дан периметр P прямоугольной трапеции, описанной около окружности радиуса R. Вычислите острый угол трапеции.

Решение задач об окружностях

Задача 1. В параллелограмм можно вписать окружность. Найдите ее радиус, если известно, что радиус окружности, описанной около него, равен $\sqrt{2}$.
Решение.
Это ж квадрат, поэтому 1.

Задача 2. Диагонали ромба равны a и b. Найдите радиус вписанной в ромб окружности.
Решение.



1. По свойству диагоналей ромба: $|AO|=\dfrac{a}{2}$ и $|DO|=\dfrac{b}{2}$. По теореме Пифагора:

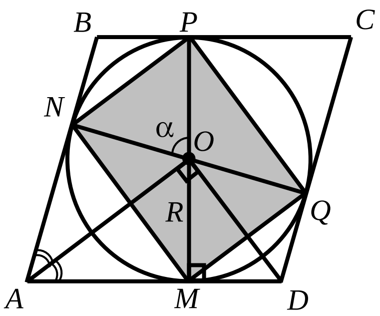
$$|AD|=\sqrt{|AO|^2+|DO|^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

2. Треугольник AOD — прямоугольный, так как диагонали ромба взаимноперпендикулярны. Поэтому:

$$|AO|\cdot|DO|=r|AD|\Leftrightarrow\frac{ab}{4}=r\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\Leftrightarrow r=\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ответ: $r=\dfrac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

Задача 3. В ромб, диагонали которого равны $\sqrt{3}+1$ и $\sqrt{3}-1$, вписана окружность. Точки касания окружности со сторонами ромба последовательно соединены. Найдите площадь получившегося четырехугольника.
Решение.
Пусть $|AC|=\sqrt{3}+1$ и $|BD|=\sqrt{3}-1$.



1. Проведем PM и NQ — диаметры окружности. O — центр вписанной окружности. Так как в четырехугольнике $PMNQ$ диагонали равны и делятся точкой пересечения пополам, то он — прямоугольник.
2. Треугольник AOD — прямоугольный. Следовательно, по теореме Пифагора:

$$|AD|=\sqrt{|AO|^2+|DO|^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=\sqrt{2},$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2}=R\sqrt{2}\Leftrightarrow R=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$S_{MNPQ}=2S_{NOP}+2S_{POQ}=2R^2\sin\alpha=\frac{1}{4}\sin\alpha.$$

3. Угол $\angle NOP=\angle BAD$, так как угол между перпендикулярами к сторонам есть угол между сторонами. Найдем:

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\angle BAM}{2}=\angle OAM,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

Таким образом,

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{4}\sin\alpha = \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{8}.$$

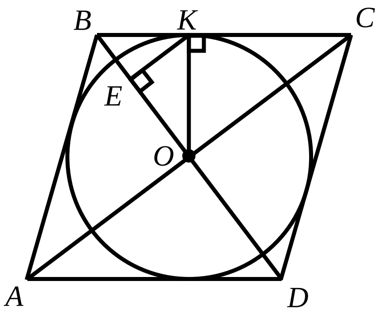
Ответ: $S_{MNPQ} = \frac{1}{8}$.

Задача 4. В ромб, диагонали которого равны 12 и 16, вписана окружность. Найдите расстояние от точки касания окружности со стороной ромба до меньшей диагонали.

Решение.

1. По свойству диагоналей ромба: $|BO| = \frac{12}{2} = 6$ и $|CO| = \frac{16}{2} = 8$. По теореме Пифагора:

$$|BC| = \sqrt{64+36} = 10.$$



2. Найдем радиус окружности:

$$|BO|\cdot|CO| = R\,|BC| \Leftrightarrow 6\cdot 8 = 10R \Leftrightarrow R = \frac{24}{5}.$$

3. Рассмотрим треугольник BOK. По теореме Пифагора:

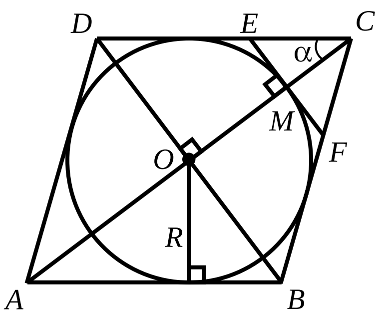
$$|BK| = \sqrt{6^2 - \frac{24^2}{5}} = \sqrt{36 - \frac{576}{25}} = \sqrt{\frac{324}{25}} = \frac{18}{5}.$$

4. Таким образом, искомое расстояние:

$$|BK|\cdot|KO| = |KE|\cdot|BO| \Leftrightarrow \frac{18}{5}\cdot\frac{24}{5} = 6|EK| \Leftrightarrow |EK| = \frac{18}{5}\cdot\frac{24}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{72}{25}.$$

Ответ: $|EK| = \frac{72}{25}$.

Задача 5. Сторона ромба равна 10 см, диагональ — 16 см. К окружности, вписанной в ромб, проведена касательная, параллельная его меньшей диагонали. Найдите длину отрезка касательной, заключенной между сторонами ромба.



Решение.

Пусть $EF \parallel DB$.

1. Так как $|EM| = |FM|$, то $|EF| = 2|FM|$. Треугольники CME и CMF равны по катету и острому углу.

2. Треугольник AOD — прямоугольный, так как диагонали ромба взаимоперпендикулярны. Сторона $|AO| = \frac{16}{2} = 8$, так как диагонали ромба делятся точкой пересечения пополам. По теореме Пифагора:

$$|DO| = \sqrt{|AD|^2 - |AO|^2} = \sqrt{100-64} = \sqrt{36} = 6.$$

3. Треугольники DOC и EMC подобны, так как $\angle DOC = \angle FMC = 90^\circ$, $\angle\alpha$ — общий.

$$\frac{|CO|}{|CM|} = \frac{8}{8-r} = k.$$

4. Рассмотрим треугольник OAB:

$$|AO|\cdot|BO| = r\,|AB| \Leftrightarrow r = \frac{8\cdot 6}{10} = \frac{24}{5}.$$

$$k = \frac{8}{8-\frac{24}{5}} = \frac{8}{\frac{16}{5}} = \frac{5}{2}.$$

5. Таким образом,

$$\frac{|DO|}{|FM|} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{|FM|} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow |FM| = \frac{12}{5}.$$

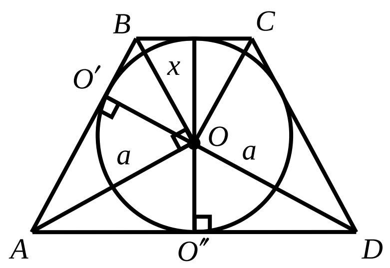
6. Итак,

$$|FE| = 2|FM| = 2\cdot\frac{12}{5} = \frac{24}{5}.$$

Ответ: $|FE| = \dfrac{24}{5}$.

Задача 6. Равнобедренная трапеция $ABCD$ описана около окружности с центром O и радиусом r. Известно, что $|AO| = a$. Найдите расстояние от точки O до остальных вершин.

Решение.



1. Треугольник ABO — прямоугольный, так как сумма односторонних углов равна $180°$, а их половины — $90°$ (центр окружности — точка пересечения биссектрис).

2. Пусть $|OB| = x$. Тогда $|BA| = \sqrt{x^2+a^2}$.

3. Итак,

$$R\sqrt{x^2+a^2} = ax \Leftrightarrow R^2a^2 + R^2x^2 = a^2x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow R^2x^2 - a^2x^2 = -R^2a^2 \Leftrightarrow x^2(R^2-a^2) = -R^2a^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{R^2a^2}{a^2-R^2}} \Leftrightarrow x = \frac{Ra}{\sqrt{a^2-R^2}}.$$

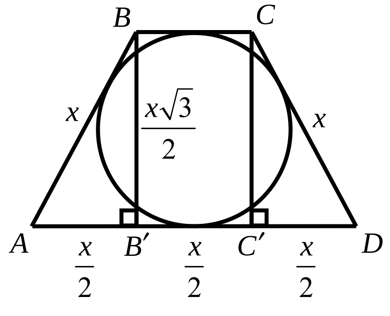
Таким образом,

$$|OB| = x = \frac{Ra}{\sqrt{a^2-R^2}}.$$

Ответ: $|OB| = \dfrac{Ra}{\sqrt{a^2-R^2}}$.

Задача 7. Определите боковую сторону равнобокой трапеции, описанной около окружности, если острый угол при основании трапеции равен $60°$, а ее площадь — $288\sqrt{3}$.

Решение.



1. Так как окружность вписана, то $|BC| + |AD| = 2|AB|$.

2. Пусть $|AB| = x$.

3. Проведем высоты BB' и CC'.

$$|BB'| = |CC'| = x\cdot\sin 60° = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

4. Из пункта 1:

$$|BC| + |AD| = 2x \Leftrightarrow |BC| + \left(\frac{x}{2} + |BC| + \frac{x}{2}\right) = 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|BC| = x \Leftrightarrow |BC| = \frac{x}{2}.$$

5. Площадь трапеции

$$S = \frac{1}{2}(|BC| + |AD|)\cdot |BB'| = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{3x}{2}\right)\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}.$$

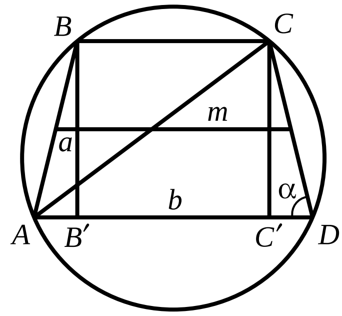
Таким образом,

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{2} = 288\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 = 576 \Leftrightarrow x = 24.$$

Ответ: 24.

Задача 8. Найдите площадь трапеции с острым углом α, если радиус описанной окружности равен R, а m — средняя линия трапеции.

Решение.



1. Так как окружность описана, то $ABCD$ — равнобедренная трапеция. Площадь равна:

$$S_{ABCD} = \frac{|BC|+|AD|}{2}\cdot |CC'| = m|CC'|.$$

2. Проведем CC' и $BB' \perp AD$. Проведем диагональ AC. По теореме синусов:

$$\frac{|AC|}{\sin\alpha} = 2R \Leftrightarrow |AC| = 2R\sin\alpha.$$

Так как средняя линия равнобедренной трапеции равна расстоянию от вершины большего основания трапеции до ее высоты ($a+b+a = 2a+b$), то $|AC'| = m$.

3. Рассмотрим треугольник ACC'. Он прямоугольный, так как $CC' \perp AD$:

$$|CC'| = \sqrt{|AC|^2 - |AC'|^2} = \sqrt{(2R\sin\alpha)^2 - m^2}.$$

4. Из пункта 1:

$$S_{ABCD} = m|CC'| = m\cdot\sqrt{(2R\sin\alpha)^2 - m^2}.$$

Ответ: $S_{ABCD} = m\cdot\sqrt{(2R\sin\alpha)^2 - m^2}$.

Задача 9. Около окружности радиуса R описана прямоугольная трапеция площади S. Вычислите острый угол трапеции.

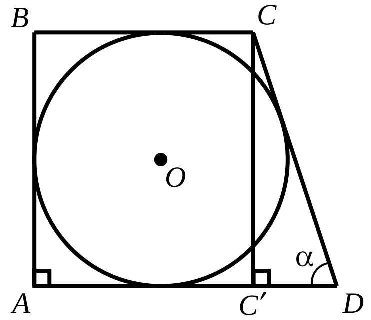
Решение.

Проведем $CC' \perp AD$.

1. Площадь прямоугольной трапеции равна $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(|BC|+|AD|)\cdot|AB|$. Так как окружность вписана, то $|BC|+|AD| = |AB|+|CD|$. Имеем: $|AB| = |CC'| = 2R$, так как это высоты трапеции. Таким образом,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(2R + |CD|)\cdot 2R = 2R^2 + R|CD|.$$

$$R|CD| = S - 2R^2 \Leftrightarrow |CD| = \frac{S-2R^2}{R}.$$



2. Так как треугольник $CC'D$ прямоугольный по построению, то

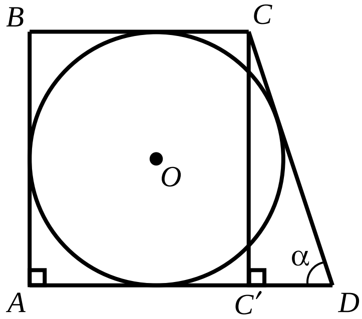
$$\sin\alpha = \frac{|CC'|}{|CD|} = \frac{2R}{\frac{S-2R^2}{R}} = \frac{2R^2}{S-2R^2} \Leftrightarrow \alpha = \arcsin\frac{2R^2}{S-2R^2}.$$

Ответ: $\alpha = \arcsin\frac{2R^2}{S-2R^2}$.

Задача 10. Дан периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности радиуса R. Вычислите острый угол трапеции.

Решение.

1. Периметр трапеции равен $P = |AB| + |BC| + |CD| + |AD|$. Так как окружность вписана, то $|BC| + |AD| = |AB| + |CD|$. Таким образом, $P = 2(|AB| + |CD|)$.



2. Проведем высоту CC', $AB = CC' = 2R$ (так как это высоты трапеции).

3. Из пункта 1:

$$\frac{P}{2} = 2R + |CD| \Leftrightarrow |CD| = \frac{P}{2} - 2R \Leftrightarrow |CD| = \frac{P-4R}{2}.$$

4. Треугольник $CC'D$ прямоугольный по построению, откуда:

$$\sin\alpha = \frac{|CC'|}{|CD|} = \frac{2R}{\frac{P-4R}{2}} = \frac{4R}{P-4R} \Leftrightarrow \alpha = \arcsin\frac{4R}{P-4R}.$$

Ответ: $\alpha = \arcsin\frac{4R}{P-4R}$.