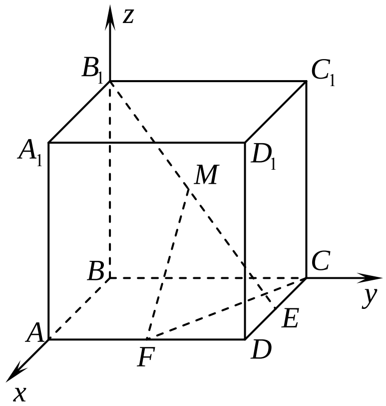
МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Вычисление расстояний и углов

Пример 1. Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 2, высота — 4. Точка *E* — середина отрезка *CD*, точка *F* — середина отрезка *AD*, точка *M* — середина отрезка B_1E. Найдите: а) угол между прямыми *CF* и B_1E; б) угол между прямой *FM* и плоскостью BDD_1.

Решение. Выберем систему координат как показано на рисунке и выпишем координаты вершин данной призмы и точек *E*, *F*, *M* в этой системе координат: $A(2;\,0;\,0)$, $B_1(0;\,0;\,4)$, $C(0;\,2;\,0)$, $E(1;\,2;\,0)$, $F(2;\,1;\,0)$, $M\left(\frac{1}{2};\,1;\,2\right)$.



Тогда $\overrightarrow{CF}\{2;\,-1;\,0\}$, $\overrightarrow{B_1E}\{1;\,2;\,-4\}$, $\overrightarrow{AC}\{-2;\,2;\,0\}$, $\overrightarrow{FM}\left\{-\frac{3}{2};\,0;\,2\right\}$.

а) Так как $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{B_1E}=2\cdot1+(-1)\cdot2+0\cdot(-4)=0$, то $\overrightarrow{CF}\perp\overrightarrow{B_1E}$ и, следовательно, $\widehat{CF;\,B_1E}=90^\circ$.

б) Так как $AC\perp BD$ и $AC\perp DD_1$, то $AC\perp(BDD_1)$, и угол φ между прямой *FM* и плоскостью BDD_1 находится из условия

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\overrightarrow{FM};\,\overrightarrow{AC}})|=\frac{|\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{FM}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}.\ (*)$$

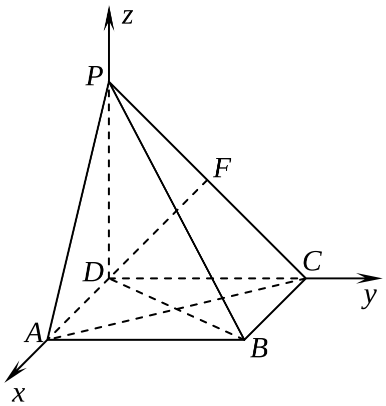
Имеем: $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AC}=3$, $|\overrightarrow{FM}|=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{5}{2}$, $|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$.

Подставив найденные значения в равенство (*), получаем $\sin\varphi=\frac{3\sqrt{2}}{10}$, откуда $\varphi=\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Ответ: 90°, $\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Пример 2. Основание четырехугольной пирамиды *PABCD* — квадрат *ADCD* со стороной, равной 6, боковое ребро *PD* перпендикулярно к плоскости основания и также равно 6. Найдите угол между плоскостями *BDP* и *BCP*.

Решение. Проведем медиану *DF* треугольника *CDP* (см. рисунок). Так как треугольник *CDP* равнобедренный ($DC=DP$), то $DF\perp CP$. Кроме того, поскольку $BC\perp(CDP)$, то $DF\perp BC$. Следовательно, $DF\perp(BCP)$. С другой стороны, так как $AC\perp BD$ и $AC\perp DP$, то $AC\perp(BDP)$. Тогда искомый угол φ между плоскостями BDP и BCP находится из условия



$$\cos\varphi=|\cos(\widehat{\overrightarrow{DF};\,\overrightarrow{AC}})|=\frac{|\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{DF}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}.\ (*)$$

Выберем систему координат как показано на рисунке и выпишем координаты вершин данной пирамиды и точки F в этой системе координат: $A(6;\,0;\,0)$, $C(0;\,6;\,0)$, $D(0;\,0;\,0)$, $P(0;\,0;\,6)$, $F(0;\,3;\,3)$.

Тогда $\overrightarrow{DF}\{0;\,3;\,3\}$, $\overrightarrow{AC}\{-6;\,6;\,0\}$, $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AC}=18$, $|\overrightarrow{DF}|=3\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}|=6\sqrt{2}$. Подставив найденные значения в равенство (*), получаем $\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$, откуда $\varphi=60^\circ$.

Ответ: 60°.

Пример 3. Докажите, что все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3:1, считая от вершины.

Решение. Пусть *ABCD* — данный тетраэдр и пусть $A(x_1;\,y_1;\,z_1)$, $B(x_2;\,y_2;\,z_2)$, $C(x_3;\,y_3;\,z_3)$, $D(x_4;\,y_4;\,z_4)$ — координаты его вершин в некоторой прямоугольной системе координат *Oxyz*.

Пусть теперь отрезок AA_1 — медиана тетраэдра *ABCD* и точка *M* делит его в отношении $AM:MA_1=3:1$. Тогда $M\left(\dfrac{x_1+3x'}{4};\,\dfrac{y_1+3y'}{4};\,\dfrac{z_1+3z'}{4}\right)$, где $(x';\,y';\,z')$ — координаты точки A_1.

Так как A_1 — точка пересечения медиан треугольника *BCD*, то

$$A_1\left(\frac{x_2+x_3+x_4}{3};\,\frac{y_2+y_3+y_4}{3};\,\frac{z_2+z_3+z_4}{3}\right),$$

откуда

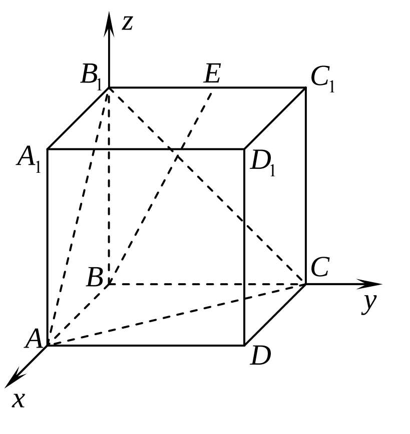
$$M\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\,\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4};\,\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right).$$

Аналогично доказывается, что точки, делящие остальные три медианы тетраэдра в отношении 3:1, считая от его вершины, имеют те же координаты. Таким образом, все эти точки совпадают, и все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3:1, считая от вершины, что и требовалось доказать.

II. Уравнение плоскости

Пример 4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра *AB* и AA_1 равны 1, а ребро *AD* равно 2. Точка *E* — середина ребра B_1C_1. Найдите угол между прямой *BE* и плоскостью AB_1C.

Решение. Выберем систему координат как показано на рисунке и выпишем координаты вершин данного параллелепипеда и точки *E* в этой системе координат: $A(1;\,0;\,0)$, $B(0;\,0;\,0)$, $C(0;\,2;\,0)$, $B_1(0;\,0;\,1)$, $E(0;\,1;\,1)$. Тогда $\overrightarrow{BE}\{0;\,1;\,1\}$.



Найдем теперь уравнение плоскости AB_1C в выбранной системе координат, для чего подставим в уравнение $ax+by+cz+d=0$ координаты точек $A(1;\,0;\,0)$, $B_1(0;\,0;\,1)$ и $C(0;\,2;\,0)$.

Решая систему

$$\begin{cases} a+d=0,\\ c+d=0,\\ 2b+d=0,\end{cases}$$

находим коэффициенты *a*, *b* и *c* уравнения $ax+by+cz+d=0$: $a=-d$, $b=-\dfrac{d}{2}$, $c=-d$.

Таким образом, уравнение плоскости AB_1C имеет вид $-dx-\dfrac{d}{2}y-dz+d=0$ или, после упрощения, $2x+y+2z-2=0$. Коэффициенты при переменных *x*, *y* и *z* — координаты некоторого вектора $\vec{n}\{2;\,1;\,2\}$, перпендикулярного к плоскости AB_1C.

Угол φ между прямой *BE* и плоскостью AB_1C находится из условия

$$\sin\varphi = |\cos(\widehat{\overrightarrow{BE};\ \vec{n}})| = \frac{|\overrightarrow{BE}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BE}|\cdot|\vec{n}|}. \ (*)$$

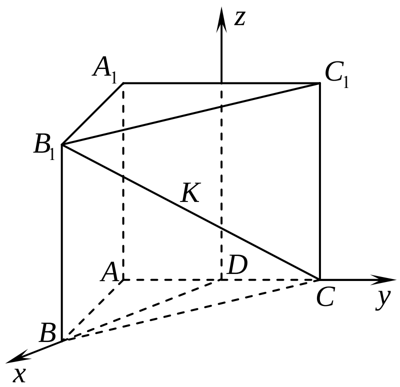
Имеем: $\overrightarrow{BE}\cdot\vec{n} = 3$, $|\overrightarrow{BE}| = \sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 3$.

Подставив найденные значения в равенство (*), получаем $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда, учитывая, что $\varphi < 90°$, получаем $\varphi = 45°$.

Ответ: $45°$.

Пример 5. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равнобедренный треугольник *ABC*, основание *AC* и высота *BD* которого равны 4. Боковое ребро призмы равно 2. Через середину *K* отрезка B_1C проведена плоскость, перпендикулярная к этому отрезку. Найдите расстояние от вершины *A* до этой плоскости.

Решение. Выберем систему координат как показано на рисунке и выпишем координаты вершин данной призмы и точки *K* в этой системе координат: $A(0;-2;0)$, $B(0;0;0)$, $C(0;2;0)$, $B_1(4;0;2)$, $K(2;1;1)$. Тогда $\overrightarrow{B_1C}\{-4;2;-2\}$. Так как данная плоскость проходит через точку $K(2;1;1)$ и перпендикулярна вектору $\overrightarrow{B_1C}\{-4;2;-2\}$, то ее уравнение имеет вид



$$-4(x-2)+2(y-1)-2(z-1)=0,$$

или, после упрощения, $2x-y+z-4=0$. (*)

Пусть точка $M(x_0;y_0;z_0)$ — проекция точки *A* на данную плоскость. Тогда искомое расстояние равно *AM*, а вектор $\overrightarrow{AM}$ имеет координаты $\overrightarrow{AM}\{x_0;y_0+2;z_0\}$. Коэффициенты при переменных *x*, *y* и *z* в уравнении (*) — координаты вектора $\vec{n}\{2;-1;1\}$, перпендикулярного к данной плоскости, а, так как $\overrightarrow{AM}\parallel\vec{n}$, то $\overrightarrow{AM}\{2k;-k;k\}$ для некоторого числа *k*.

Вектор $\overrightarrow{AM}$ однозначно задается своими координатами, следовательно, $x_0 = 2k$, $y_0 = -k-2$, $z_0 = k$. Подставив координаты точки $M(x_0;y_0;z_0)$ в уравнение $2x-y+z-4=0$, получаем $2(2k)-(-k-2)+k-4=0$, откуда $k=\frac{1}{3}$.

Окончательно имеем

$$AM = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{4k^2+k^2+k^2} = |k|\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.