Единый государственный экзамен по математике, 2008 год демонстрационная версия

Часть 1

A1. Выполнить действия $6c^{\frac{3}{7}} + 4(c^{\frac{1}{7}})^3$.

1. $70c^{\frac{3}{7}}$ **2.** $70c^{\frac{6}{7}}$ **3.** $10c^{\frac{6}{7}}$ **4.** $10c^{\frac{3}{7}}$

Решение. Воспользуемся формулой $(a^x)^y = a^{xy}$ и приведем подобные слагаемые:

$$6c^{\frac{3}{7}} + 4(c^{\frac{1}{7}})^3 = 6c^{\frac{3}{7}} + 4c^{\frac{3}{7}} = 10c^{\frac{3}{7}}.$$

Правильный ответ: 4.

A2. Найти значение выражения $4 \cdot 3\log_3 5$.

1. $\log_3 20$ **2.** 625 **3.** $12\log_3 5$ **4.** 20

Решение. Имеем:

$$4 \cdot 3\log_3 5 = 12\log_3 5.$$

Правильный ответ: 3.

A3. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{189}}{3\sqrt[3]{7}}$.

1. 1 **2.** $\dfrac{1}{3}$ **3.** 9 **4.** 27

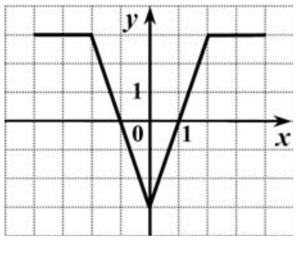
Решение. Воспользуемся формулой $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$:

$$\frac{\sqrt[3]{189}}{3\sqrt[3]{7}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{189}{7}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{27} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1.$$

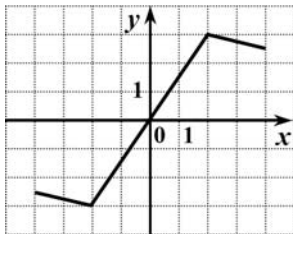
Правильный ответ: 1.

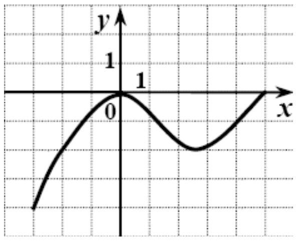
A4. На одном из рисунков изображен график четной функции. Укажите этот рисунок.

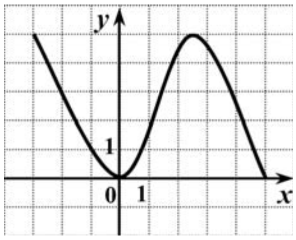
1.



2.



3. 

4. 

Решение. График четной функции симметричен относительно оси ординат. Это график, изображенный на рисунке 1.

Правильный ответ: 1.

А5. Найдите производную функции $y = x^6 - 4\sin x$.

1.	$y' = 6x^5 + 4\cos x$	**2.**	$y' = 6x^5 - 4\cos x$
3.	$y' = \dfrac{x^7}{7} + 4\cos x$	**4.**	$y' = x^5 - 4\cos x$

Решение. Используя табличные значения производных $(x^6)' = 6x^5$, $(\sin x)' = \cos x$ и правила дифференцирования, имеем:

$$y' = 6x^5 - 4\cos x$$

Правильный ответ: 2.

А6. Найдите множество значений функции $y = 1{,}5 + \log_{2,5} x$.

1. $(-\infty; +\infty)$ **2.** $(0; +\infty)$ **3.** $(1{,}5; +\infty)$ **4.** $(-\infty; 1{,}5)$

Решение. Множество значений логарифмической функции — множество всех действительных чисел. Поэтому

$$-\infty < \log_{2,5} x < \infty \Leftrightarrow -\infty < 1{,}5 + \log_{2,5} x < \infty .$$

Правильный ответ: 1.

А7. Решите уравнение $\cos 2x = 1$.

1. $\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ **2.** $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ **3.** $\dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$ **4.** $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

Решение. Имеем:

$$\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} .$$

Правильный ответ: 2.

А8. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{7}}(x+3) > -1$.

1. $(-\infty; 7)$ **2.** $(-\infty; 4)$ **3.** $(-3; 4)$ **4.** $(-3; 7)$

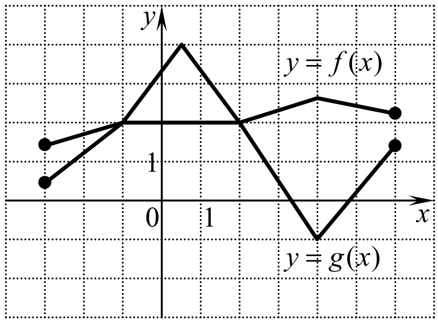
Решение. Так как логарифмическая функция с основанием, меньшим единицы, — функция убывающая, имеем:

$$\log_{\frac{1}{7}}(x+3) > -1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{7}}(x+3) > \log_{\frac{1}{7}} 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3>0 \\ x+3<7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x<4 \end{cases} \Leftrightarrow -3<x<4.$$

Правильный ответ: 3.

A9. На рисунке изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-3;6]$. Укажите те значения x, для которых выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$.



1. $[-1;2]$
2. $[-3;3] \cup [5;6]$
3. $[-3;2]$
4. $[-3;-1] \cup [2;6]$

Решение. Неравенство $f(x) \geq g(x)$ выполнено на промежутках, где график функции $y = f(x)$ расположен не ниже графика функции $y = g(x)$. Такими промежутками являются отрезки $[-3;\ -1]$ и $[2;\ 6]$.

Правильный ответ: 4.

A10. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{5-4x} - \frac{1}{27}}$.

1. $(0,5;+\infty)$ 2. $(-\infty;0,5]$ 3. $[0,5;+\infty)$ 4. $[2;+\infty)$

Решение. Область определения арифметического квадратного корня есть множество неотрицательных чисел. Имеем:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{5-4x} - \frac{1}{27} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{5-4x} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{3} \Leftrightarrow 5-4x \leq 3 \Leftrightarrow 4x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 0,5.$$

Правильный ответ: 3.

B1. Найдите значение выражения $3\sin^2\alpha - 7\cos^2\alpha$, если $\cos\alpha = -0,1$.

Решение. Упростим данное выражение, используя основное тригонометрическое тождество:

$$3\sin^2\alpha - 7\cos^2\alpha = 3(1-\cos^2\alpha) - 7\cos^2\alpha = 3 - 10\cos^2\alpha.$$

Подставим значение $\cos\alpha = -0,1$ в получившееся выражение:

$$3 - 10\cdot(-0,1)^2 = 3 - 10\cdot 0,01 = 3 - 0,1 = 2,9.$$

Ответ: 2,9.

B2. Решите уравнение $7^{x+1}-5\cdot 7^x=98$.

Решение. Используем формулу $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$ и приведем подобные слагаемые:

$$7^{x+1}-5\cdot 7^x=98 \Leftrightarrow 7\cdot 7^x-5\cdot 7^x=98 \Leftrightarrow 2\cdot 7^x=98 \Leftrightarrow 7^x=49 \Leftrightarrow 7^x=7^2 \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: $\{2\}$.

B3. Решите уравнение $\sqrt{2x^2-x-6}=-x$.

Решение. Имеем:

$$\sqrt{2x^2-x-6}=-x \Leftrightarrow \begin{cases} -x\ge 0, \\ 2x^2-x-6=(-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0, \\ x^2-x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=3; \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ: -2.

Часть 2

B4. Вычислите значение выражения $\log_2\sin\frac{\pi}{12}+\log_2\sin\frac{\pi}{6}+\log_2\sin\frac{5\pi}{12}$.

Решение. Заметим, что

$$\log_2\sin\frac{\pi}{6}=\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1.$$

Воспользуемся свойством логарифмов $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$:

$$\log_2\sin\frac{\pi}{12}+\log_2\sin\frac{5\pi}{12}=\log_2\left(\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{5\pi}{12}\right)=\log_2\left(\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right)=$$

$$=\log_2\left(\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\right)=\log_2\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}\cdot\right)=\log_2\frac{1}{4}=-2.$$

Таким образом,

$$\log_2\sin\frac{\pi}{12}+\log_2\sin\frac{\pi}{6}+\log_2\sin\frac{5\pi}{12}=-1-2=-3.$$

Ответ: -3.

B5. Прямая, проходящая через начало координат, является касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $A(-7;14)$. Найдите $f'(-7)$.

Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Для прямой, проходящей через точки с координатами $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$, где $x_1\ne x_2$, значение углового коэффициента k задается отношением

$$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$

В нашем случае касательная проходит через точки с координатами $(0;\ 0)$ и $(-7;14)$, поэтому угловой коэффициент, а вместе с ним и искомая величина $f'(-7)$ есть

$$f'(-7)=k=\frac{0-14}{0-(-7)}=-2.$$

Ответ: -2.

В6. Найдите количество целочисленных решений неравенства $6-5x-x^2 \geq 0$, удовлетворяющих условию $1+\mathrm{tg}^2\frac{\pi x}{4} > 0$.

Решение. Поскольку $6-5x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 1$, целыми решениями неравенства являются следующие восемь чисел: $-6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$. Подставляя найденные числа в неравенство $1+\mathrm{tg}^2\frac{\pi x}{4} > 0$, убеждаемся, что это условие выполняется для всех из них, кроме -6 и -2, для которых величина $\mathrm{tg}\frac{\pi x}{4}$ не определена. Таким образом, искомое количество целочисленных решений равно 6.

Ответ: 6.

В7. Решите уравнение $25x^2-20x+6=\left(\sqrt{2}-\cos\frac{5\pi x}{4}\right)\left(\sqrt{2}+\cos\frac{5\pi x}{4}\right)$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней).

Решение. Выделим полный квадрат в левой части уравнения и воспользуемся формулой разности квадратов в правой части уравнения:

$$25x^2-20x+6=\left(\sqrt{2}-\cos\frac{5\pi x}{4}\right)\left(\sqrt{2}+\cos\frac{5\pi x}{4}\right) \Leftrightarrow$$

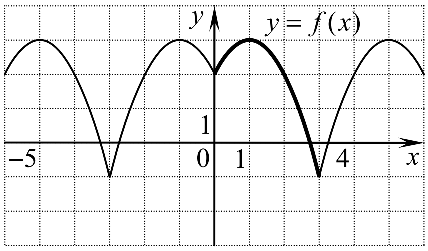
$$\Leftrightarrow (5x-2)^2+2=2-\cos^2\frac{5\pi x}{4} \Leftrightarrow (5x-2)^2+\cos^2\frac{5\pi x}{4}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-2=0, \\ \cos\frac{5\pi x}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{5}, \\ \cos\left(\frac{5\pi}{4}\cdot\frac{2}{5}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{5}, \\ \cos\frac{\pi}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}.$$

Ответ: 0,4.

В8. Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой и является чётной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке $[0;3]$ функция задана формулой $f(x)=2+2x-x^2$. Определите количество нулей этой функции на отрезке $[-5;4]$.

Решение. Построим график функции $f(x)=2+2x-x^2$ на отрезке $[0;3]$ (см. рис., выделено жирной линией). Поскольку функция $y=f(x)$ четная, ее график симметричен относительно оси ординат. Отразим построенный участок графика относительно этой оси. Поскольку функция $y=f(x)$ периодическая, построенный участок ее графика будет бесконечно повторяться. Построенный график пересекает отрезок $[-5;4]$ в четырех точках, поэтому искомое число нулей функции равно 4.



Ответ: 4.

В9. В комиссионном магазине цена товара, выставленного на продажу, ежемесячно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый месяц уменьшалась цена магнитофона, если, выставленный на продажу за 4000 рублей, после двух снижений он был продан за 2250 рублей.

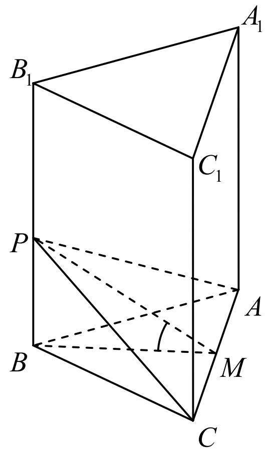
Решение. Пусть после первого снижения цена магнитофона стала равна $4000x$ рублей. Тогда после второго снижения она стала $4000x^2$ рублей. Имеем:

$$4000x^2 = 2250 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2250}{4000} \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{16} \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 0{,}75 .$$

Значит, после каждого снижения цена составляла 75 % от предыдущей, т. е. уменьшалась на 25 %.

Ответ: 25.

B10. Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — правильный треугольник ABC, сторона которого равна $8\sqrt{3}$. На ребре BB_1 отмечена точка P так, что $BP : PB_1 = 3 : 5$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и ACP, если расстояние между прямыми BC и A_1C_1 равно 16.



Решение. Угол между плоскостями ABC и APC равен углу между лежащими в этих плоскостях перпендикулярами к прямой, по которой плоскости пересекаются. В нашем случае это $\angle PMB$ между медианами треугольников ABC и APC, проведёнными из вершин B и P, и являющихся высотами этих треугольников (см. рис.). Треугольник PBM прямоугольный, откуда

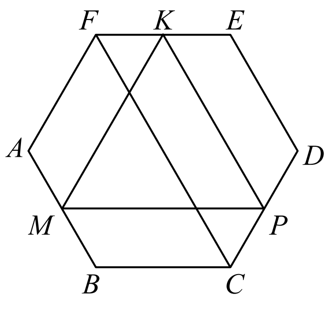
$$\operatorname{tg}\widehat{PMB} = \frac{BP}{BM} = \frac{\frac{3}{8}BB_1}{\frac{\sqrt{3}}{2}AB} .$$

Скрещивающиеся прямые BC и A_1C_1 лежат в параллельных плоскостях — основаниях призмы. Поэтому расстояние между этими прямыми равно расстоянию между основаниями, т. е. высоте призмы. Итак, $BB_1 = 16$, поэтому

$$\operatorname{tg}\widehat{PMB} = \frac{\frac{3}{8}\cdot 16}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 8\sqrt{3}} = \frac{1}{2} .$$

Ответ: 0,5.

B11. Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна $32\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MPK, если точки M, P и K — середины сторон AB, CD и EF, соответственно.



Решение. Сторона DE правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна радиусу описанной около него окружности, а диагональ FC — диаметру этой окружности. Следовательно, $FC = 2DE = 64\sqrt{3}$. Отрезок KP средняя линия трапеции $CDEF$, откуда $KP = \frac{DE + FC}{2} = 48\sqrt{3}$. Аналогично, $KM = MP = 48\sqrt{3}$. Таким образом, треугольник MPK — правильный треугольник и радиус вписанной в него окружности равен $\frac{KP}{2\sqrt{3}} = 24$.

Ответ: 24.

С1. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = |\sqrt{1-x^2} - 2| + \sqrt{1-x^2} + x^3 - 3x^2$.

Решение.

1. Область определения данной функции совпадает с множеством решений неравенства $1 - x^2 \ge 0$. Поскольку $1 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$, получаем $D(f) = [-1; 1]$. На этом множестве $\sqrt{1-x^2} - 2 < 0$, откуда $\left|\sqrt{1-x^2} - 2\right| = 2 - \sqrt{1-x^2}$, т. е. $|\sqrt{1-x^2} - 2| + \sqrt{1-x^2} + x^3 - 3x = x^3 - 3x^2 + 2$.

2. Найдем наибольшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ на отрезке $[-1; 1]$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Далее имеем: $2 \notin [-1; 1]$; $f(-1) = -2;\ f(0) = 2;\ f(1) = 0$. Таким образом, $\max\limits_{[-1;1]} f = 2$.

Ответ: 2.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С1
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) найдена область определения данной функции; 2) преобразована формула, задающая функцию; 3) найдено наибольшее значение данной функции. Все тождественные преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения. В результате этой описки (ошибки) может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, не соответствующие критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

С2. Решите уравнение: $\log_{3-4x^2}(9 - 16x^4) = 2 + \dfrac{1}{\log_2(3-4x^2)}$.

Решение.

$$\log_{3-4x^2}(9 - 16x^4) = 2 + \frac{1}{\log_2(3-4x^2)} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{3-4x^2}((3-4x^2)(3+4x^2)) = 2 + \log_{3-4x^2} 2, \\ 3 - 4x^2 > 0, \\ 3 - 4x^2 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{3-4x^2}((3-4x^2)(3+4x^2)) = 2 + \log_{3-4x^2} 2, \\ 3 - 4x^2 > 0, \\ 3 - 4x^2 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \log_{3-4x^2}(3+4x^2) = 2 + \log_{3-4x^2} 2, \\ 4x^2 < 3, \\ 4x^2 \ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{3-4x^2}(3+4x^2) = \log_{3-4x^2}(2(3-4x^2)), \\ 4x^2 < 3, \\ 4x^2 \ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 4x^2 = 6 - 8x^2, \\ x^2 < 0,75, \\ x^2 \ne 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 0,25 \Leftrightarrow x = \pm 0,5.$$

Ответ: $\{-0,5; 0,5\}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С2
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) уравнение сведено к равносильной ему системе (или установлена область допустимых значений x); 2) решена полученная система. Все тождественные преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения. В результате этой описки (ошибки) может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, не соответствующие критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

Часть 3

С3. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(-3;-1]$ значение выражения x^4-8x^2-2 *не равно* значению выражения ax^2.

Решение.[1] Требуется найти все значения a, для которых уравнение $x^4-8x^2-2=ax^2$ не имеет решений на промежутке $(-3;-1]$.

Уравнение $x^4-8x^2-2=ax^2$ равносильно уравнению $\frac{x^4-2}{x^2}=a+8$. Найдем множество значений функции $f(x)=\frac{x^4-2}{x^2}$ на промежутке $(-3;-1]$.

$f'(x)=\frac{4x^3x^2-2x(x^4-2)}{x^4}=\frac{2(x^4+2)}{x^3}<0$ при $x\in(-3;-1]$. Значит, функция $f(x)=\frac{x^4-2}{x^2}$ убывает на промежутке $(-3;-1]$. Поскольку она непрерывна на этом промежутке, множество ее значений на промежутке нем есть промежуток $\left[f(-1);f(-3)\right)$, т. е. промежуток $[-1;\frac{79}{9})$.

Таким образом, уравнение не имеет решений тогда и только тогда, когда $a+8<-1$ или $a+8\geq\frac{79}{9}$. Окончательно получаем $a<-9$ или $a\geq\frac{7}{9}$.

Ответ: $a\in(-\infty;-9)\cup\left[\frac{7}{9};+\infty\right)$.

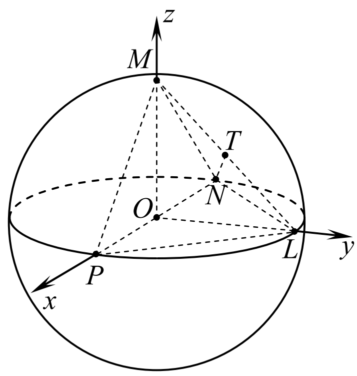
Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) уравнение заменено равносильным ему уравнением, правая часть которого постоянна; 2) найдено множество значений левой части полученного уравнения; 3) найдены все значения a, при которых уравнение не имеет корней на промежутке $(-3;-1]$. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Отсутствует или является неполным обоснование шага 2). Допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения. В результате этой описки (ошибки) может быть получен неверный ответ.
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения, но шаг 2) выполнен неверно. Допустима описка или вычислительная ошибка, в результате которой может быть получен неверный ответ.

[1] Другой способ решения аналогичной задачи см. решение задачи С3 экзаменационного варианта 2007 года.

1	Верно выполнен шаг 1), а остальные выполнены неверно.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 — 4 балла.

С4. Отрезок PN — диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите синус угла между прямой NT и плоскостью PMN, если T — середина ребра ML.

Решение.



1. Пусть O — центр данной сферы, а R — ее радиус. Тогда $OP = OL = OM = ON = R$. Сечение сферы плоскостью PLN — окружность радиуса R, описанная около треугольника PLN.

2. Обозначим через H — длину высоты пирамиды $PNML$, опущенной из вершины M, а через h длину высоты треугольника PLN, проведенной к стороне PN. Поскольку точка M лежит на сфере, а плоскость PLN содержит центр сферы, наибольшее значение H, равное R, достигается в том случае, когда $H = MO$, т.е. когда $MO \perp (PLN)$. Аналогично, поскольку PN — диаметр окружности, описанной около треугольника PLN, а точка L лежит на этой окружности, то $h \le R$, причем $h = R$, если $h = LO$, откуда $LO \perp PN$.

Для объема V пирамиды $PNML$ имеем: $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot PN \cdot h \cdot H = \frac{1}{6}\cdot 2R\cdot h\cdot H$. Следовательно, этот объем будет наибольшим при $h = LO = R$, $H = MO = R$.

3. Так как $MO \perp (PLN)$, то, согласно определению прямой, перпендикулярной плоскости, $MO \perp OP$ и $MO \perp OL$. Кроме того, $LO \perp PN$. Таким образом, прямые OL, OM и OP попарно перпендикулярны. Выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, как это показано на рисунке. В этой системе координат имеем:

$$O(0;0;0),\ L(0;R;0),\ M(0;0;R),\ N(-R;0;0),\ T\left(0;\tfrac{R}{2};\tfrac{R}{2}\right),\ \overrightarrow{OL}\{0;R;0\},\ \overrightarrow{NT}\left\{R;\tfrac{R}{2};\tfrac{R}{2}\right\}.$$

По доказанному выше $LO \perp PN$ и $LO \perp OM$, значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $OL \perp (PMN)$. Тогда синус угла между прямой NT и плоскостью PMN находится из условия

$$\sin(\widehat{NT,(PMN)}) = \cos(\widehat{NT,OL}) = |\cos(\widehat{\overrightarrow{NT},\overrightarrow{OL}})| = \left|\frac{\overrightarrow{NT}\cdot\overrightarrow{OL}}{|\overrightarrow{NT}|\cdot|\overrightarrow{OL}|}\right|.$$

Окончательно имеем

$$\sin(\widehat{NT,(PMN)}) = \left|\frac{0+\dfrac{R^2}{2}+0}{\sqrt{0+R^2+0}\cdot\sqrt{R^2+\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{R^2}{4}}}\right| = \frac{R^2\cdot 2}{2R\cdot R\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4 [2)]
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) установлено, что наибольший объем данная пирамида имеет в случае, когда $MO \perp (PLN)$ и $LO \perp PN$; 2) доказано, что прямые *OL*, *OM* и *OP* попарно перпендикулярны; 3) выбрана прямоугольная система координат и определены координаты векторов $\overrightarrow{OL}$ и $\overrightarrow{NT}$ в этой системе координат; 4) вычислен синус угла между прямой NT и плоскостью PMN. Верно приведены ссылки на используемые при доказательстве положения теории: а) признак перпендикулярности прямой и плоскости; б) определение прямой, перпендикулярной плоскости; в) формула для вычисления вычислен синус угла между прямой и плоскостью. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведены все шаги решения 1) — 4). Приведены ссылки на используемые при доказательстве положения теории а) – в). Допустимы отсутствие обоснований ключевых моментов или неточности в обоснованиях. [3)] Допустимы одна описка и/или вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
2	Приведены все шаги решения 1) — 3). Ссылки на используемые при доказательстве положения теории а) — в) либо отсутствуют, либо приведено только одно из них, но сами эти положения теории использованы при решении. Допустимы описки и/или вычислительные ошибки, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этих ошибок или описок может быть получен неверный ответ.
1	Ход решения правильный: имеются шаги 1) и 2) решения, но решение не завершено или завершено неверно. Приведенные в решении обоснования и вычисления не содержат грубых ошибок
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 — 4 балла.

С5. Решите уравнение $f(g(x)) + g(3 + f(x)) = 30$, если известно, что

$$f(x) = 0{,}5x^4 - 4x + 5 \text{ и } g(x) = \begin{cases} 25, & x \ge 4, \\ 2^x + \dfrac{9}{5-x}, & x < 4. \end{cases}$$

Решение. Найдем наименьшее значение функции $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x + 5$. $f'(x) = 2x^3 - 4$. Если $x < \sqrt[3]{2}$, то $f'(x) < 0$, а если $x > \sqrt[3]{2}$, то $f'(x) > 0$. Следовательно, $x = \sqrt[3]{2}$ — точка минимума данной функции. Так как эта функция непрерывна и $f(\sqrt[3]{2})$ — ее единственный экстремум, то $f(\sqrt[3]{2}) = 5 - 3\sqrt[3]{2}$ — наименьшее значение функции $f(x) = 0{,}5x^4 - 4x + 5$.

Оценим разность $f(\sqrt[3]{2}) - 1$: $f(\sqrt[3]{2}) - 1 = 5 - 3\sqrt[3]{2} - 1 = 4 - 3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{54} > 0$. Таким образом, $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) > 1$, откуда $f(x) > 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $3 + f(x) > 4$ и $g(3 + f(x)) = 25$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда исходное уравнение принимает вид $f(g(x)) + 25 = 30$, откуда получаем:

[2)] Критерии сформулированы для оценки конкретного, в данном случае координатного, способа решения задачи.

[3)] Неточностью в обоснованиях является замена свойства на определение, свойства на признак или наоборот, а также неверные названия теорем или формул.

$$f(g(x))+25=30 \Leftrightarrow f(g(x))=5 \Leftrightarrow 0,5(g(x))^4-4(g(x))+5=5 \Leftrightarrow g(x)(g^3(x)-8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x)=0, \\ g(x)=2. \end{array}\right.$$

Поскольку $g(x)>0$ при всех $x\in\mathbb{R}$ (см. условие), уравнение $g(x)=0$ не имеет решений.

Решим уравнение $g(x)=2$.

1) Если $x\ge 4$, то $g(x)=25$. Следовательно, уравнение $g(x)=2$ не имеет корней на множестве $[4;+\infty)$.

2) Если $x<4$, то уравнение $g(x)=2$ принимает вид $2^x+\frac{9}{5-x}=2$.

Функция $y=2^x+\frac{9}{5-x}$ возрастает на промежутке $(-\infty;4)$ как сумма двух возрастающих на этом промежутке функций — $y=2^x$ и $y=\frac{9}{5-x}$. Следовательно, уравнение $2^x+\frac{9}{5-x}=2$ имеет на промежутке $(-\infty;4)$ не более одного корня. Подбором находим $x=-1$.

Ответ: -1.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) найдено наименьшее значение функции $f(x)=0,5x^4-4x+5$; 2) доказано, что $f(x)>1$ для всех $x\in\mathbb{R}$; 3) уравнение $f(g(x))+g(3+f(x))=30$ заменено равносильным ему уравнением; 4) решено уравнение $f(g(x))=5$; Обоснованы все ключевые моменты решения: а) отсутствие решений уравнения $g(x)=0$; б) единственность решения уравнения $g(x)=2$. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Обоснованы все ключевые моменты решения. Допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения. В результате этой описки (ошибки) может быть получен неверный ответ.
2	Верно выполнены шаги 1) и 2), а шаги 3) и 4) выполнены неверно, в том числе — неверно обоснованы. Допустимы 1 — 2 вычислительные ошибки, в результате которых может быть получен неверный ответ.
1	Верно выполнен шаг 1) решения, а остальные — либо отсутствуют, либо выполнены неверно.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 — 4 балла.