Единый государственный экзамен по математике, 2007 год демонстрационная версия

Часть 1

A1. Найдите значение выражения $4^{6p} \cdot 4^{-4p}$ при $p = \frac{1}{4}$.

1. 1 **2.** 2 **3.** 32 **4.** 34

Решение. Используем свойство степени: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. В нашем случае

$$4^{6p} \cdot 4^{-4p} = 4^{6p-4p} = 4^{2p}.$$

Подставим в полученное выражение $p = \frac{1}{4}$, имеем

$$4^{2\cdot\frac{1}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2.$$

Правильный ответ: 2.

A2. Упростите выражение $\frac{\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt{16}}{\sqrt[3]{250}}$.

1. 1,2 **2.** $\frac{6 \cdot \sqrt[3]{2}}{5}$ **3.** 2,4 **4.** $\sqrt[3]{2}$

Решение. Используя свойство $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, получим:

$$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{250}} = \sqrt[3]{\frac{54}{250}} = \sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}\right)^3} = \frac{3}{5}.$$

Осталось вычислить произведение:

$$\frac{3}{5} \cdot \sqrt{16} = \frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{12}{5} = 2,4.$$

Правильный ответ: 3.

A3. Найдите значение выражения $\log_4(64c)$, если $\log_4 c = -3,5$.

1. $-6,5$ **2.** $-0,5$ **3.** $-10,5$ **4.** $-67,5$

Решение. Воспользуемся формулой логарифма произведения:

$$\log_4(64c) = \log_4 64 + \log_4 c = 3 + (-3,5) = -0,5.$$

Правильный ответ: 2.

Примечание. Возможен другой способ рассуждения: воспользуемся равенством $\log_4 c = -3,5$, рассматривая его как уравнение на переменную c:

$$\log_4 c = -3,5 \Leftrightarrow c = 4^{-3,5}.$$

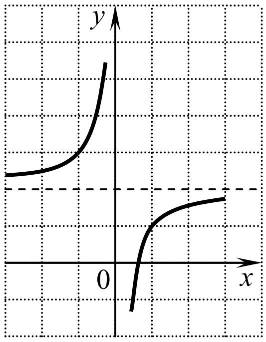
Подставим найденное значение c в искомый логарифм:

$$\log_4(64c) = \log_4(4^3 \cdot 4^{-3,5}) = \log_4 4^{3-3,5} = \log_4 4^{-0,5} = -0,5,$$

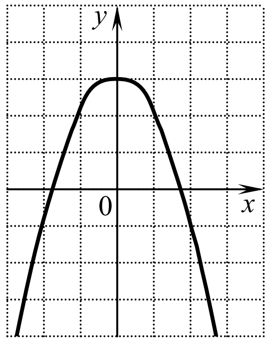
что и завершает решение.

А4. На одном из следующих рисунков изображен график нечетной функции. Укажите этот рисунок.

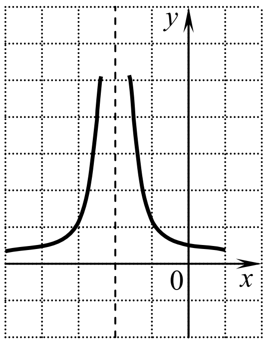
1.



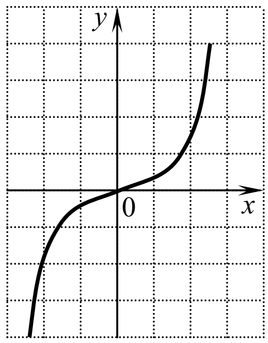
2.



3.



4.



Решение. График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Такой график изображен на рисунке 4.

Правильный ответ: 4.

А5. Найдите производную функции $y = (x-3)\cos x$.

1.	$y' = \cos x + (x-3)\sin x$	**2.**	$y' = (x-3)\sin x - \cos x$
3.	$y' = \cos x - (x-3)\sin x$	**4.**	$y' = -\sin x$

Решение. Для вычисления производной воспользуемся правилом вычисления производной произведения

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

В нашем случае $f(x) = x - 3$, $g(x) = \cos x$. Найдем производные этих функций: $f'(x) = 1$, $g'(x) = -\sin x$. Поэтому

$$y' = 1 \cdot \cos x + (x-3)(-\sin x) = \cos x - (x-3)\sin x.$$

Правильный ответ: 3.

А6. Укажите множество значений функции $y = 2^x + 5$.

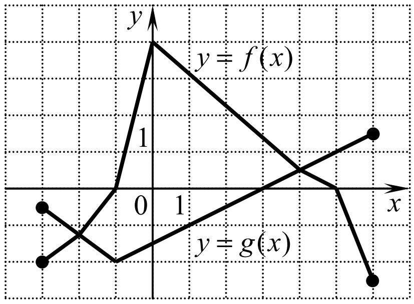
1. $(5; +\infty)$	**2.** $(0; +\infty)$	**3.** $(-\infty; +\infty)$	**4.** $(7; +\infty)$

Решение. Множество значений показательной функции 2^x — все положительные числа. Тогда

$$0 < 2^x < +\infty \Leftrightarrow 5 < 2^x + 5 < +\infty .$$

Правильный ответ: 1.

А7. На рисунке изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-3; 6]$. Укажите множество всех значений *x*, для которых выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$.



1. $[-1; 5]$	**2.** $[-3; 2] \cup [4; 6]$
3. $[-3; -1] \cup [5; 6]$	**4.** $[-2; 4]$

Решение. Неравенство $f(x) \geq g(x)$ выполнено на промежутках, где график функции $y = f(x)$ расположен не ниже графика функции $y = g(x)$. Таким промежутком является отрезок $[-2; 4]$.

Правильный ответ: 4.

А8. Найдите область определения функции $f(x) = \dfrac{25}{3 - \sqrt[4]{x}}$.

1. $[0; 3) \cup (3; +\infty)$	**2.** $[0; +\infty)$
3. $[0; 81) \cup (81; +\infty)$	**4.** $(-\infty; 81) \cup (81; +\infty)$

Решение. Поскольку знаменатель дроби должен быть отличен от нуля, область определения функции задается неравенством $3 - \sqrt[4]{x} \neq 0$. Решим его:

$$3 - \sqrt[4]{x} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} \neq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \neq 81 .$$

Тем самым область определения функции задается объединением промежутков:

$$[0; 81) \cup (81; +\infty) .$$

Правильный ответ: 3.

А9. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(7x - 21) > \log_{\frac{1}{2}}(6x)$.

1. $(-\infty; 21)$	**2.** $(3; 21)$	**3.** $(3; +\infty)$	**4.** $(21; +\infty)$

Решение. Заметим, что основание логарифмов меньше единицы и воспользуемся соответствующей теоремой о решении неравенств вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$:

$$\log_{\frac{1}{2}}(7x - 21) > \log_{\frac{1}{2}}(6x) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 21 > 0, \\ 7x - 21 < 6x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x < 21 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 21 .$$

Правильный ответ: 2.

A10. Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)-1=0$.

1.	$\pm\frac{4}{3}+8n,\ n\in\mathbb{Z}$	**2.**	$\frac{4}{3}+8n,\ n\in\mathbb{Z}$
3.	$\pm\frac{2}{3}+4n,\ n\in\mathbb{Z}$	**4.**	$\frac{2}{3}+4n,\ n\in\mathbb{Z}$

Решение. Используем формулу корней уравнения $\cos x = a$:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)-1=0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{4}{\pi}\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right) \Leftrightarrow x=\pm\frac{4}{3}+8n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Правильный ответ: 1.

B1. Решите уравнение $7\cdot 5^{\log_5 x}=x+21$.

Решение. Очевидно, областью определения уравнения является множество $(0;+\infty)$. При $x>0$ выражение $5^{\log_5 x}$ тождественно равно *x*, т. е. при $x>0$ исходное уравнение равносильно уравнению $7x=21+x$, значит $6x=21$; $x=3{,}5$. Т. к. $3{,}5>0$, то эта значение искомое.

Ответ: $\{3{,}5\}$.

B2. Найдите значение выражения $5\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=0{,}5$.

Решение. Т. к. $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$, а $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$, то

$$5\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=5(-\sin\alpha)-\sin\alpha=-6\sin\alpha.$$

Учитывая, что $\sin\alpha=0{,}5$, окончательно получаем:

$$5\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-6\cdot 0{,}5=-3.$$

Ответ: -3.

B3. Решите уравнение $x^2\cdot\sqrt{x-1}-4\sqrt{x-1}=0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в ответ запишите сумму всех его корней.)

Решение. В левой части уравнения вынесем за скобки выражения $\sqrt{x-1}$. Получим $\sqrt{x-1}\cdot(x^2-4)=0$.

Второй множитель имеет смысл при любых значениях *x*, а первый — лишь при $x\geq 0$. Значит, данное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ \begin{cases} x^2-4=0, \\ x-1\geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решением уравнения $x-1=0$ является 1. Для решения системы достаточно найти корни уравнения $x^2-4=0$ и отобрать те из них, которые удовлетворяют условию $x-1\ge 0$. Корнями уравнения $x^2-4=0$, очевидно, являются числа 2 и -2. Указанному неравенству удовлетворяет только 2. Итак, исходное уравнение имеет два корня: 1 и 2. Их сумма равна 3.

Ответ: 3.

Часть 2

B4. Найдите значение выражения $2^x - y$, если $(x;\, y)$ является решением системы $\begin{cases} 7\cdot 2^x + 6y = 2, \\ 2^{x+1} - 3y = 43. \end{cases}$

Решение. Умножая второе уравнение системы на 2 и складывая с первым уравнением, получим равносильную систему

$$\begin{cases} 7\cdot 2^x + 2\cdot 2^{x+1} = 88, \\ 2^{x+1} - 3y = 43. \end{cases}$$

Из первого уравнения полученной системы найдем значение 2^x:

$$7\cdot 2^x + 2\cdot 2^{x+1} = 88 \Leftrightarrow 7\cdot 2^x + 4\cdot 2^x = 88 \Leftrightarrow 11\cdot 2^x = 88 \Leftrightarrow 2^x = 8\,.$$

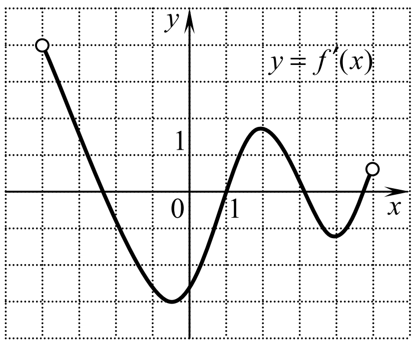
Подставляя полученное значение 2^x в первое уравнение исходной системы, получаем:

$$7\cdot 8 + 6y = 2 \Leftrightarrow 6y = -54 \Leftrightarrow y = -9\,.$$

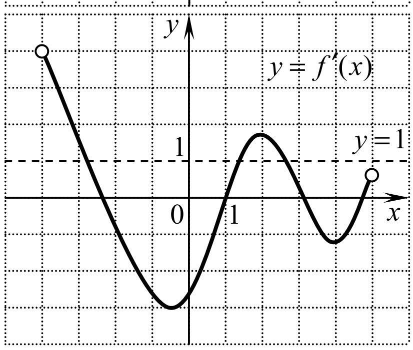
Тогда значение выражения $2^x - y$ равно $8+9=17$.

Ответ: 17.

B5. Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-4;\,5)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите число касательных к графику функции $y=f(x)$, которые наклонены под углом в 45° к положительному направлению оси абсцисс.



Решение. Т. к. угловой коэффициент касательной (тангенс угла наклона касательной), проведенной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0, равен $f'(x_0)$, а $\operatorname{tg}45^\circ=1$, то для решения задачи достаточно выяснить, сколько точек пересечения имеет график, изображенный на рисунке, и прямая, заданная уравнением $y=1$. Очевидно, таких точек три. Следовательно, и касательных к графику функции $y=f(x)$, которые наклонены под углом в 45° к положительному направлению оси абсцисс также будет три.



Ответ: 3.

B6. Найдите значение выражения $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$ при $x=1{,}2007$.

Решение. Для решения задачи достаточно заметить, что выражение $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ тождественно равно выражению $|\sqrt{x-1}-1|$. Действительно:

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}=$$
$$=\sqrt{(\sqrt{x-1})^2-2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=|\sqrt{x-1}-1|.$$

Аналогично $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=|\sqrt{x-1}+1|$, и тогда

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=|\sqrt{x-1}-1|+|\sqrt{x-1}+1|.$$

Воспользовавшись определением модуля, получаем:

$$|\sqrt{x-1}-1|+|\sqrt{x-1}+1|\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}-1+\sqrt{x-1}+1, \text{ если } \sqrt{x-1}-1\ge 0,\\ -\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}+1, \text{ если } \sqrt{x-1}-1<0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt{x-1}, \text{ если } \sqrt{x-1}\ge 1,\\ 2, \text{ если } \sqrt{x-1}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt{x-1}, \text{ если } x\ge 2,\\ 2, \text{ если } 1\le x<2.\end{cases}$$

Т. к. число 1,2007 принадлежит промежутку $[1;\,2)$, то значение исходного выражения равно 2.

Ответ: 2.

B7. Найдите наименьший корень уравнения $\log_3(x+1)^2+\log_3|x+1|=6$.

Решение. Очевидно, что областью определения уравнения являются все действительные числа кроме 0. Выражение $\log_3(x+1)^2$ тождественно равно выражению $2\log_3|x+1|$. Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению $2\log_3|x+1|+\log_3|x+1|=6$.

Далее получаем:

$$2\log_3|x+1|+\log_3|x+1|=6\Leftrightarrow 3\log_3|x+1|=6\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\log_3|x+1|=2\Leftrightarrow|x+1|=3^2\Leftrightarrow|x+1|=9.$$

Значит, $x+1=9$ или $x+1=-9$. Откуда получаем $x=8$ или $x=-10$. Наименьшим из найденных значений является -10.

Ответ: -10.

B8. Периодическая функция $y=f(x)$ определена для всех действительных чисел. Ее период равен двум и $f(1)=5$. Найдите значение выражения $3f(7)-4f(-3)$.

Решение. Т. к. период функции $y=f(x)$ равен 2, то $f(x)=f(x+2k)$ для любого x из области определения этой функции и любого целого числа k.

Поскольку $7=1+2\cdot 3$; $-3=1+2\cdot(-2)$, имеем $f(7)=f(-3)=f(1)=5$, откуда:

$$3\cdot f(7)-4\cdot f(-3)=3\cdot 5-4\cdot 5=15-20=-5.$$

Ответ: -5.

B9. Денежный вклад в банк за год увеличивается на 11 %. Вкладчик внес в банк 7000 рублей. В конце первого года он решил увеличить сумму вклада и продлить срок действия договора еще на год, чтобы в конце второго года иметь на счету не менее 10000 рублей. Какую наименьшую сумму необходимо дополнительно положить на счет по окончании первого года, чтобы при той же процентной ставке (11 %) реализовать этот план? (Ответ округлите до целых.)

Решение 1. По окончании первого года вкладчик имел на счете $7000+0{,}11\cdot 7000=7770$ рублей. Если не класть на счет дополнительной суммы, то в конце второго года на счете окажется $7777+0{,}11\cdot 7770=8642{,}7$ рублей. Поэтому на счет необходимо положить такую сумму x, которая через год с учетом процентов даст $10000-8642{,}7=1375{,}3$ рубля.

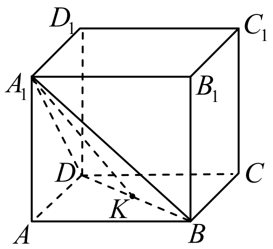
Искомая величина находится из уравнения $1{,}11x=1375{,}3$, откуда $x=1239{,}009\ldots$ Это означает, что наименьшая сумма, которую нужно положить на счет, составляет 1240 рублей.

Решение: 2. Искомая сумма есть наименьшее решение неравенства

$$1{,}11^2\cdot 7000+1{,}11x\ge 10000 \Leftrightarrow x\ge 1239{,}009\ldots .$$

Ответ: 1240.

В10. Высота правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 8, а сторона основания равна $6\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины *A* до плоскости A_1BD.



Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данная призма. Искомое расстояние от вершины *A* до плоскости A_1BD есть высота *H* пирамиды AA_1BD, опущенная из ее вершины *A* на основание A_1BD (см. рис.).

Поскольку $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма, ее боковое ребро AA_1 перпендикулярно плоскости основания ABD, а ее основание $ABCD$ — квадрат. Объем пирамиды AA_1BD может быть вычислен по формуле $V=\frac{1}{3}S\cdot AA_1$, где $S=\dfrac{1}{2}AB^2$ — площадь равнобедренного прямоугольного треугольника ABD. Следовательно, $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(6\sqrt{2})^2\cdot 8=96$.

С другой стороны, $V=\frac{1}{3}S_1H$, где S_1 – площадь треугольника A_1BD, откуда $H=\dfrac{3V}{S_1}$. Треугольник A_1BD равнобедренный, так как его стороны A_1B и A_1D — диагонали равных прямоугольников. Чтобы найти площадь треугольника A_1BD, построим его высоту A_1K. Поскольку A_1BD равнобедренный треугольник, отрезок A_1K является также его медианой, значит $S_1=AK\cdot A_1K$.

Далее находим:

а) из равнобедренного прямоугольного треугольника ABD: $BD=AB\sqrt{2}=12$;

б) из прямоугольного треугольника AA_1B: $A_1B^2=AB^2+AA_1^2=136$;

в) из прямоугольного треугольника A_1KB: $A_1K=\sqrt{A_1B^2-BK^2}=10$.

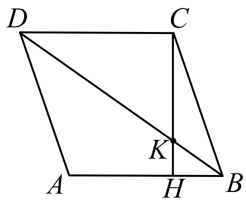
Таким образом, $S_1=6\cdot 10=60$ и окончательно получаем $H=\dfrac{3\cdot 96}{60}=4{,}8$.

Ответ: 4,8.

Примечание. Объем пирамиды A_1ABD может быть также найден из следующих соображений: поскольку площадь основания *ABD* пирамиды A_1ABD равна половине площади основания данной призмы, а отрезок A_1A — их общая высота, объем пирамиды A_1ABD равен одной шестой объема данной призмы.

В11. Дан ромб *ABCD* с острым углом *B*. Площадь ромба равна 320, а синус угла *B* равен 0,8. Высота *CH* пересекает диагональ *BD* в точке *K*. Найдите длину отрезка *CK*.

Решение. Площадь ромба, как и любого параллелограмма, равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними. В нашем случае имеем $S = AB^2 \sin B$, откуда



$$AB = \sqrt{\frac{S}{\sin B}} = \sqrt{\frac{320}{0,8}} = 20 .$$

Из прямоугольного треугольника BCK находим $CH = BC \sin B = 20 \cdot 0,8 = 16$.

Поскольку диагональ ромба BD делит угол B пополам, отрезок BK — биссектриса треугольника BHC, откуда по свойству биссектрисы

$$\frac{HK}{CK} = \frac{HB}{CB} = \cos B = \sqrt{1-\sin^2 B} = \sqrt{1-(0,8)^2} = 0,6 .$$

Далее имеем:

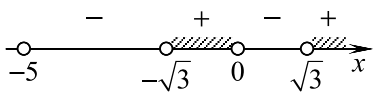
$$\frac{CH-CK}{CK} = 0,6 \Leftrightarrow \frac{16-CK}{CK} = 0,6 \Leftrightarrow 16 - CK = 0,6CK \Leftrightarrow CK = 10.$$

Ответ: 10.

C1. Найдите значение функции $f(x) = 10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5} - \log_{\frac{1}{10}}(x+5)}$ в точке максимума.

Решение. Найдем область определения данной функции:

$$\begin{cases} \dfrac{x^3-3x}{x+5} > 0, \\ x+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) > 0, \\ x+5 > 0. \end{cases}$$

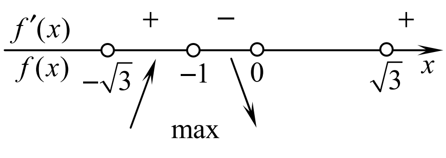


Таким образом, область определения функции: $(-\sqrt{3};\, 0) \cup (\sqrt{3};\, +\infty)$.

На найденной области определения упростим правую часть формулы, задающей функцию:

$$f(x) = 10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5} + \lg(x+5)} = 10^{\lg(x^3-3x)} = x^3 - 3x .$$

Найдем производную заданной функции: $f'(x) = 3x^2 - 3$ и решим уравнение $f'(x) = 0$. Производная обращается в нуль при $x = -1$ ($x = 1$ не принадлежит области определения функции). Укажем знаки производной и отметим поведение функции (см. рис.):



Поскольку в точке $x = -1$ производная обращается в нуль, а в окрестности этой точки меняет знак с плюса на минус, $x = -1$ — точка максимума. Значение функции в точке максимума равно $f(-1) = 2$.

Ответ: 2.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания C1
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) найдена область определения данной функции; 2) преобразована формула, задающая функцию; 3) найдено значение данной функции в точке максимума. Все тождественные преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения. В результате этой описки (ошибки) может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, не соответствующие критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

C2. Решите уравнение $3\sin 2x \operatorname{tg} x + 4\cos^2 x = 7\sin x + 1$

Решение. Сведем данное уравнение к квадратному относительно $\sin x$:

$$3\sin 2x \operatorname{tg} x + 4\cos^2 x = 7\sin x + 1 \Leftrightarrow 6\sin x \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + 4(1-\sin^2 x) = 7\sin x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sin^2 x + 4 - 4\sin^2 x - 7\sin x - 1 = 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Решим уравнение $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$:

$$2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0,5, \\ \sin x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = 0,5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k; \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ \ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Заметим, что найденные серии решений удовлетворяют условию $\cos x \neq 0$.

Ответ: $\left\{ (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания C2
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) уравнение сведено к равносильной ему системе (или установлена область допустимых значений x); 2) решена полученная система. Все тождественные преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения. В результате этой описки (ошибки) может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, не соответствующие критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

Часть 3

С3. Найдите все значения *x*, которые удовлетворяют неравенству $(2a-1)x^2 < (a+1)x + 3a$ при любом значении параметра *a*, принадлежащем промежутку $(1;\,2)$.

Решение 1. Мы имеем квадратное неравенство $(2a-1)x^2 - (a+1)x - 3a < 0$, так как $(2a-1) \neq 0$ при условии $a \in (1;\,2)$.

Найдем дискриминант и корни квадратного трехчлена $(2a-1)x^2 - (a+1)x - 3a$:

$$D = (a+1)^2 + 12a(2a-1) = (5a-1)^2,$$
$$x = \frac{a+1 \pm (5a-1)}{2(2a-1)},$$

откуда $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{3a}{2a-1}$.

Выражение $\dfrac{3a}{2a-1}$ положительно, так как $a > 1$ по условию. Следовательно, $x_2 > x_1$ и решением данного неравенства является промежуток $\left(-1;\, \dfrac{3a}{2a-1}\right)$.

Оценим снизу выражение $\dfrac{3a}{2a-1}$:

$$\frac{3a}{2a-1} = \frac{3a - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}}{2a-1} = \frac{3\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}}{2\left(a - \frac{1}{2}\right)} = \frac{3\left(a - \frac{1}{2}\right)}{2\left(a - \frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{2(2a-1)} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4a-2}.$$

Далее имеем: $1 < a < 2 \Leftrightarrow 4 < 4a < 8 \Leftrightarrow 2 < 4a - 2 < 6$, откуда

$$\frac{1}{4a-2} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{3}{4a-2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{3}{4a-2} > 2.$$

Таким образом, при любом значении параметра *a*, принадлежащем промежутку $(1;\,2)$, верхняя граница промежутка $\left(-1;\, \dfrac{3a}{2a-1}\right)$ больше 2. Значит, все значения *x* из промежутка $(1;\,2]$ удовлетворяют данному неравенству.

Решение 2. $(2a-1)x^2 - (a+1)x - 3a < 0 \Leftrightarrow (2x^2 - x - 3)a + (-x^2 - x) < 0$. Полученное неравенство — линейное неравенство относительно *a*. Линейная функция $f(a) = (2x^2 - x - 3)a - (x^2 + x)$ отрицательна на промежутке (1; 2) тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из двух условий:

1. $\begin{cases} f(1) \le 0, \\ f(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \le 0, \\ 3x^2 - 3x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 2.$ (1)

2. $\begin{cases} f(1) < 0, \\ f(2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0, \\ 3x^2 - 3x - 6 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \le 2.$ (2)

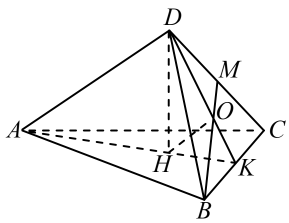
Объединяя решения (1) и (2), получаем $-1 < x \le 2$.

Ответ: $(1;\,2]$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3[1)]
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) решено квадратное неравенство; 2) произведена оценка выражения $\frac{3a}{2a-1}$; 3) найдены все значения x, которые удовлетворяют данному неравенству при любом значении параметра a, принадлежащем промежутку $(1;\,2)$. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Отсутствует или является неполным обоснование шага 2). Допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения. В результате этой описки (ошибки) может быть получен неверный ответ.
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения, но шаг 2) выполнен неверно. Допустима описка или вычислительная ошибка, в результате которой может быть получен неверный ответ.
1	Верно выполнен шаг 1), а остальные выполнены неверно.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 — 4 балла.

С4. Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

Решение.



Пусть $DABC$ — данная правильная пирамида, DK — ее апофема, DH — высота, и пусть основание конуса вписано в боковую грань BCD (см. рис.).

Тогда:

а) по свойству правильной пирамиды, точка H — центр треугольника ABC, следовательно, точка H принадлежит высоте (медиане, биссектрисе) AK треугольника ABC;

б) отрезок DK является высотой, медианой и биссектрисой равнобедренного треугольника BCD;

в) основание O высоты HO конуса является центром окружности, вписанной в треугольник BCD, следовательно, O — точка пересечения биссектрис DK и BM этого треугольника. Кроме того, отрезок HK является радиусом окружности, вписанной в правильный треугольник ABC, а отрезок OK — радиусом окружности, вписанной в равнобедренный треугольник BCD, т. е. искомым радиусом основания конуса.

Обозначим через a, b и d соответственно длину стороны основания данной пирамиды, длину ее бокового ребра и ее апофему, а через x — радиус основания конуса. Тогда имеем:

а) отрезок HK — радиус окружности, вписанной в правильный треугольник ABC, следовательно, $HK = \frac{a}{2\sqrt{3}}$;

б) так как $HO \perp (BDK)$, отрезок HO — высота прямоугольного треугольника DHK, проведенная из вершины его прямого угла H, следовательно, $HK^2 = OK \cdot DK$, т. е. $\frac{a^2}{12} = dx$, откуда $x = \frac{a^2}{12d} = \frac{7}{3d}$;

[1)] Критерии сформулированы для оценки первого способа решения задачи в) отрезок OK — радиус окружности, вписанной в треугольник DCB, следовательно, $OK = \frac{S}{p}$, где S — площадь треугольника BCD, p — его полупериметр, откуда $x = \frac{ad}{a+2b} = \frac{d\sqrt{7}}{b+\sqrt{7}}$.

Приравнивая найденные в пп. б) и в) значения x, получаем $\frac{d\sqrt{7}}{b+\sqrt{7}} = \frac{7}{3d}$, откуда $3d^2 = b\sqrt{7} + 7$. Поскольку из прямоугольного треугольника BDK: $DK^2 = BD^2 - BK^2$, т. е. $d^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} = b^2 - 7$, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3d^2 = b\sqrt{7} + 7, \\ d^2 = b^2 - 7 \end{cases} \underset{b>0,\, d>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b = \frac{4\sqrt{7}}{3}, \\ d = \frac{7}{3}. \end{cases}$$

Тогда $x = \frac{7}{3d} = 1$.

Ответ. 1.

Примечание. Соотношение $x = \frac{ad}{a+2b} = \frac{d\sqrt{7}}{b+\sqrt{7}}$ можно было получить, применив свойство биссектрисы треугольника к биссектрисе BO треугольника BDK (см. рисунок): $\frac{OK}{OD} = \frac{BK}{BD}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) определено положение центра основания конуса, вписанного в пирамиду; 2) составлены выражения для вычисления радиуса основания конуса; 3) решена полученная система уравнений; 4) найден радиус основания конуса. Верно приведены ссылки на используемые при доказательстве положения теории: а) свойства правильной пирамиды; б) свойства равнобедренного треугольника; в) положение центра окружности, вписанной в треугольник. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведены все шаги решения 1) — 4). Приведены ссылки на используемые при доказательстве положения теории а) – в). Допустимы неточности в обоснованиях ключевых моментов. [2)] Допустимы одна описка и/или вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
2	Приведены все шаги решения 1) — 4). Ссылки на используемые при доказательстве положения теории а) — в) либо отсутствуют, либо сформулированы неверно, но сами эти положения теории использованы при решении. Допустимы описки и/или вычислительные ошибки, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этих ошибок или описок может быть получен неверный ответ.
1	Ход решения правильный: имеются шаги 1) и 2) решения, но решение не завершено или завершено неверно. Приведенные в решении обоснования и вычисления не содержат грубых ошибок
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 — 4 балла.

[2)] Неточностью в обоснованиях является замена свойства на определение, свойства на признак или наоборот, а также неверные названия теорем или формул.

С5. Найдите количество всех решений системы уравнений $\begin{cases} y(1-x)^2 + x^3 = 0, \\ 2x - \dfrac{10}{x\log_y 2} = 5\log_{32}(0{,}125y^2) - 7. \end{cases}$

Решение. Область определения данной системы уравнение задается соотношениями: $x \neq 0$; $y > 0$, $y \neq 1$. На этой области определения имеем:

$$2x - \frac{10}{x\log_y 2} = 5\log_{32}(0{,}125y^2) - 7 \Leftrightarrow 2x - \frac{10}{x\log_y 2} = 5\log_{32}(0{,}125y^2) - 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{10}{x}\cdot\log_2 y = 2\log_2 y - 3 - 7 \Leftrightarrow x^2 + (5-\log_2 y)x - 5\log_2 y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(x-\log_2 y) = 0.$$

Рассмотрим два случая: $x = -5$ и $x = \log_2 y$. Если $x = -5$, то первое уравнение системы, (назовем его уравнением (1)), принимает вид $36y - 125 = 0$, откуда $y = \dfrac{125}{36} > 0$. Значит, пара $\left(-5; \dfrac{125}{36}\right)$ — решение данной системы.

Если $x = \log_2 y$, то $y = 2^x$ и уравнение (1) имеет вид $2^x(1-x)^2 + x^3 = 0$. Если $x > 0$, то $x^3 > 0$ и $2^x(1-x)^2 + x^3 > 0$, т. е. положительных корней уравнение (1) не имеет. Если $x < 0$, то $1 - x \neq 0$ и

$$2^x(1-x)^2 + x^3 = 0 \Leftrightarrow 2^x = -x^3(1-x)^{-2}.$$

Покажем, что полученное уравнение имеет единственный корень. Функция $y = 2^x$ возрастает, так как $2 > 1$.

Исследуем функцию $y = -x^3(1-x)^{-2}$:

$$y' = -3x^2(1-x)^{-2} - x^3(-2)(1-x)^{-3}(-1) = -x^2(1-x)^{-3}(3(1-x)+2) = -x^2(1-x)^{-3}(3-x).$$

При $x < 0$ имеем $x^2 > 0$, $3 - x > 0$, $(1-x)^{-3} > 0$. Значит, $y' < 0$ при $x < 0$, и, так как функция $y = -x^3(1-x)^{-2}$ непрерывна на промежутке $(-\infty; 0]$, она убывает на этом промежутке. Таким образом, если уравнение $2^x(1-x)^2 + x^3 = 0$ и имеет решение, то единственное.

Покажем, что решение есть: пусть $x = -3$, тогда $2^x = \dfrac{1}{8}$, $-x^3(1-x)^{-2} = \dfrac{27}{16}$ и $2^x < -x^3(1-x)^{-2}$. Если же $x = 0$, то $2^x = 1$, $-x^3(1-x)^{-2} = 0$ и $2^x > -x^3(1-x)^{-2}$. Поэтому, так как обе функции являются непрерывными, уравнение $2^x = -x^3(1-x)^{-2}$ имеет единственный корень x_0, причем $-3 < x_0 < 0$, т. е. $x_0 \neq -5$. При этом $y_0 = 2^{x_0} > 0$.

Таким образом, исходная система имеет ровно два решения: $\left(-5; \dfrac{125}{36}\right)$ и $(x_0; 2^{x_0})$.

Ответ: система имеет ровно два решения.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) найдена область определения данной системы; 2) решено относительно пары $(x; y)$ второе уравнение системы; 3) найдено первое решение данной системы; 4) доказано, что данная система имеет ровно два решения. Обоснованы все ключевые моменты решения: а) наличие не более одного решения уравнения $2^x(1-x)^2 + x^3 = 0$; б) существование решения уравнения $2^x(1-x)^2 + x^3 = 0$. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Обоснованы все ключевые моменты решения. Допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения. В результате этой описки (ошибки) может быть получен неверный ответ.
2	Верно выполнены шаги 1), 2) и 3), а шаг 4) выполнен неверно, в том числе — неверно обоснован. Допустимы 1 — 2 вычислительные ошибки, в результате которых может быть получен неверный ответ.
1	Верно выполнены шаг 1) и 2) решения, а остальные — либо отсутствуют, либо выполнены неверно.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 — 4 балла.