Единый государственный экзамен по математике, 2006 год демонстрационная версия

Часть 1

A1. Вычислите: $\sqrt[4]{48\cdot 27}$.

1. 36 **2.** 18 **3.** 6 **4.** 12

Решение. Представим произведение чисел, находящихся под знаком корня, в виде произведения степеней простых множителей и воспользуемся тождеством $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$. Имеем:

$$\sqrt[4]{48\cdot 27}=\sqrt[4]{16\cdot 3\cdot 3^3}=\sqrt[4]{2^4\cdot 3^4}=\sqrt[4]{2^4}\sqrt[4]{3^4}=2\cdot 3=6\,.$$

Правильный ответ: 3.

A2. Представьте в виде степени выражение $5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{4}{3}}$.

1. $25^{\frac{8}{9}}$ **2.** $5^{\frac{8}{9}}$ **3.** 25^2 **4.** 5^2

Решение. Применяя свойство степени $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$, получаем:

$$5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{4}{3}}=5^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}=5^{\frac{6}{3}}=5^2.$$

Правильный ответ: 4.

A3. Найдите значение выражения $\frac{1}{2}\cdot 2^{\log_2 10}$.

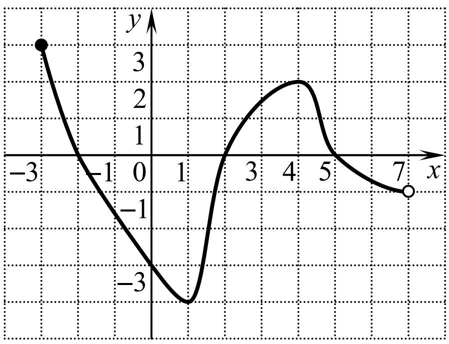
1. 10 **2.** 5 **3.** $\log_2 10$ **4.** 20

Решение. Воспользуемся определением логарифма: $a^{\log_a b}=b$. Имеем:

$$\frac{1}{2}\cdot 2^{\log_2 10}=\frac{1}{2}\cdot 10=5\,.$$

Правильный ответ: 2.

A4. Укажите множество значений функции, график которой изображен на рисунке:



1. $[-3;\,7)$

2. $[-3;\,-2]\cup[2;\,5]$

3. $[-4;\,3]$

4. $[-4;\,-1]\cup(-1;\,3]$

Решение. Проекция графика на ось ординат есть отрезок, ординаты всех точек которого составляют множество $[-4; 3]$. Это и есть искомая область значений заданной функции.

Правильный ответ: 3.

A5. Найти область определения функции $f(x) = \log_{0,5}(2x - x^2)$.

1. $(0; 2)$ **2.** $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ **3.** $[0; 2]$ **4.** $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$

Решение. Область определения функции задаётся неравенством $2x - x^2 > 0$. Имеем:

$$2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(2 - x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

Правильный ответ: 1.

A6. Укажите наибольшее значений функции $y = 1 - \cos 3x$.

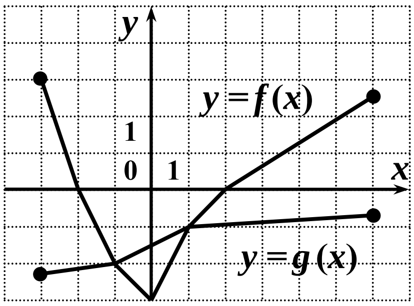
1. 1 **2.** 2 **3.** 0 **4.** 4

Решение. Множество значений функции $\cos x$ — отрезок $[-1;\ 1]$. Таким образом, получаем:

$$-1 \le \cos 3x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -\cos 3x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 1 - \cos 3x \le 2.$$

Правильный ответ: 2.

A7. На рисунке изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-3; 6]$. Укажите те значения *x*, для которых выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$.



1. $[-3; -1] \cup [1; 6]$
2. $[-1; 1]$
3. $[-3; -2] \cup [2; 6]$
4. $[-2; 2]$

Решение. Неравенство $f(x) \le g(x)$ выполнено на промежутках, где график функции $y = f(x)$ расположен не выше графика функции $y = g(x)$. Таким промежутком является отрезок $[-1;\ 1]$.

Правильный ответ: 2.

A8. Решите уравнение $\sin 3x = \dfrac{1}{2}$.

1. $(-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{\pi}{3}n,\ n \in \mathbb{Z}$ **2.** $\pm\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi}{3}n,\ n \in \mathbb{Z}$

3. $(-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi}{3}n,\ n \in \mathbb{Z}$ **4.** $\pm\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi}{3}n,\ n \in \mathbb{Z}$

Решение. Имеем: $\sin 3x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n \Leftrightarrow x = (-1)^n \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi}{3}n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Правильный ответ: 1.

A9. Решите неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-7} > 0{,}04$.

1. $(-\infty;\ 3)$ **2.** $\left(-\infty;\ \frac{5}{3}\right)$ **3.** $(3;\ +\infty)$ **4.** $\left(-\infty;\ -\frac{5}{3}\right)$

Решение. Так как показательная функция, основание которой меньше 1, — функция убывающая, имеем:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-7} > 0{,}04 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-7} > \left(\frac{1}{5}\right)^{2} \Leftrightarrow 3x-7<2 \Leftrightarrow x<3.$$

Правильный ответ: 1.

A10. Укажите абсциссу точки графика функции $f(x)=5+4x-x^2$, в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

1. 0 **2.** 2 **3.** –2 **4.** 5

Решение. Угловой коэффициент касательной равен нулю в тех точках, где производная функции равна нулю. Найдем производную заданной функции: $f'(x)=4-2x$.

Найдем нули производной: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4-2x=0 \Leftrightarrow x=2$.

Таким образом, искомая абсцисса равна 2.

Правильный ответ: 2.

B1. Найдите значение выражения $\dfrac{3\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{2\cos(\pi-\alpha)}$, если $\alpha=\frac{7\pi}{4}$.

Решение. Упростим данное выражение, используя формулы приведения:

$$\frac{3\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{2\cos(\pi-\alpha)}=\frac{3\cos\alpha}{-2\cos\alpha}=-\frac{3}{2}=-1{,}5.$$

Поскольку полученное выражение не зависит от значения α, исходное выражение тоже от него не зависит и равно $-1{,}5$ для всех допустимых значений α.

Ответ: $-1{,}5$.

B2. Решите уравнение $\sqrt{2x+37}=x+1$.

Решение. Имеем:

$$\sqrt{2x+37}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0, \\ 2x+37=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ x^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ \left[\begin{array}{l} x=6; \\ x=-6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Ответ: 6.

B3. Решите уравнение $\log_{1{,}6}(5x+8)-\log_{1{,}6}3=\log_{1{,}6}7$.

Решение. Перенесем слагаемое $-\log_{1,6}3$ в правую часть и воспользуемся формулой $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$:

$$\log_{1,6}(5x+8)-\log_{1,6}3=\log_{1,6}7\Leftrightarrow\log_{1,6}(5x+8)=\log_{1,6}7+\log_{1,6}3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\log_{1,6}(5x+8)=\log_{1,4}21\Leftrightarrow 5x+8=21\Leftrightarrow 5x=13\Leftrightarrow x=\frac{13}{5}.$$

Ответ: $2,6$.

Часть 2

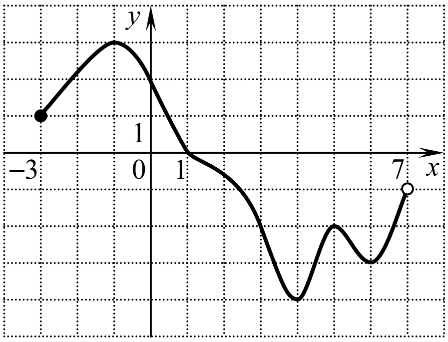
B4. Вычислите $(3,4\sqrt[3]{25\sqrt{5}}+1,6\sqrt{5\sqrt[3]{25}})^{-\frac{6}{11}}$.

Решение. Используя формулы $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$, $(a^x)^y=a^{xy}$, последовательно получаем:

$$(3,4\sqrt[3]{25\sqrt{5}}+1,6\sqrt{5\sqrt[3]{25}})^{-\frac{6}{11}}=(3,4\cdot(5^2\cdot 5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}+1,6\cdot(5\cdot 5^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}})^{-\frac{6}{11}}=$$
$$=\left(3,4\cdot(5^{2+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}+1,6\cdot(5^{1+\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{6}{11}}=\left(3,4\cdot(5^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{3}}+1,6\cdot(5^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{6}{11}}=\left(3,4\cdot 5^{\frac{5}{6}}+1,6\cdot 5^{\frac{5}{6}}\right)^{-\frac{6}{11}}=$$
$$=\left(5\cdot 5^{\frac{5}{6}}\right)^{-\frac{6}{11}}=\left(5^{1+\frac{6}{6}}\right)^{-\frac{6}{11}}=\left(5^{\frac{11}{6}}\right)^{-\frac{6}{11}}=5^{-1}=\frac{1}{5}=0,2.$$

Ответ: $0,2$.

B5. Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-3;\,7)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку x_0, в которой функция $y=f(x)$ принимает наибольшее значение.



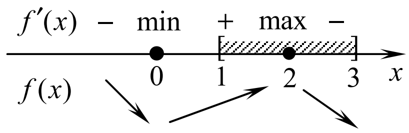
Решение. Производная $y=f'(x)$, график которой изображен на рисунке, имеет два промежутка знакопостоянства. На интервале $(-3;1)$ она положительна, а на интервале $(1;\,7)$ — отрицательна. Следовательно, функция имеет максимум в точке 1. Поскольку функция $y=f(x)$ непрерывна на промежутке $(-3;\,7)$ и имеет на этом промежутке единственный экстремум — максимум, она принимает в этой точке наибольшее значение на данном промежутке.

Ответ: 1.

B6. Найдите наибольшее значение функции $y=2,7\cdot e^{3x^2-x^3-4}$ на отрезке $[1;\,3]$.

Решение. Поскольку основание степени $e>1$, данная функция достигает наибольшего значения при наибольшем значении показателя степени. Пусть $f(x)=3x^2-x^3-4$. Найдём ее производную и отметим на рисунке знаки найденной производной и поведение функции:

$$f'(x)=6x-3x^2=3x(2-x)$$



Далее имеем:

$$\max_{[1;\ 3]} f(x) = f_{\max}(x) = f(2) = 3\cdot 2^2 - 2^3 - 4 = 0,$$

откуда

$$\max_{[1;\ 3]} y(x) = 2{,}7\cdot e^0 = 2{,}7.$$

Ответ: 2,7.

B7. Решите уравнение $0{,}2^{x+1} = \sqrt{35+5x}$. В ответе запишите корень уравнения или сумму корней, если их несколько.

Решение. Заметим, что число -2 является корнем данного уравнения. Поскольку функция $y = 0{,}2^{x+1}$ является монотонно убывающей функцией, а функция $y = \sqrt{35+5x}$ — монотонно возрастающей, других корней уравнение не имеет.

Ответ: –2.

B8. Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной *x* значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(2x+1)(x-2)(x-3)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

Решение. На положительных значений переменной решения уравнения $f(x) = 0$ совпадают с решениями уравнения $g(x) = 0$, т. е. уравнение $f(x) = 0$ имеет два корня. Поэтому и в силу нечетности функции $y = f(x)$ уравнение $f(x) = 0$ имеет два (противоположных им) отрицательных корня. Заметим, что по условию $f(0) = g(0) = 0$. Поэтому уравнение $f(x) = 0$ имеет 5 корней.

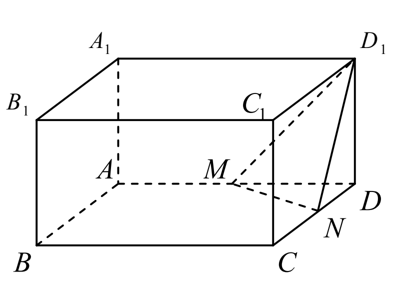
Ответ: 5.

B9. По пенсионному вкладу банк выплачивает 10 % годовых. По истечении каждого года эти проценты капитализируются, т. е. начисленная сумма присоединяется к вкладу. На данный вид вклада был открыт счёт в 50 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 3 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

Решение. Через три года сумма на счете станет равна $1{,}1^3\cdot 50\ 000 = 66\ 550$ рублей. Поэтому доход составил $66550 - 50000 = 6\ 550$ рублей.

Ответ: 6550.

B10. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является прямоугольник *ABCD*, стороны которого равны $6\sqrt{5}$ и $12\sqrt{5}$. Высота призмы равна 8. Секущая плоскость проходит через вершину D_1 и середины ребер *AD* и *CD*. Найдите косинус угла между плоскостью основания и плоскостью сечения.



Решение. Пусть $AD = BC = 12\sqrt{5}$, $AB = CD = 6\sqrt{5}$. Обозначим через *M* середину ребра *AD*, а через *N* — середину ребра *CD*. Тогда, заданное сечение — треугольник D_1MN.

В прямоугольном треугольнике *DMN* с катетами $DM = 6\sqrt{5}$ и $DN = 3\sqrt{5}$ опустим на гипотенузу *MN* высоту *DH*. Поскольку $D_1D \perp DH$ и $DH \perp MN$ по теореме о трех перпендикулярах $D_1H \perp MN$. Поэтому $\angle D_1HD$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью основания и плоскостью сечения.

Из прямоугольного треугольника D_1DH имеем:

$$\cos\widehat{D_1DH} = \frac{DH}{D_1H} = \frac{DH}{\sqrt{DD_1{}^2 + DH^2}} = \frac{DH}{\sqrt{64 + DH^2}}.$$

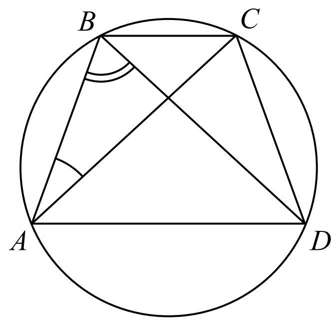
Осталось найти длину DH:

$$DH = \frac{2S_{\Delta DMN}}{MN} = \frac{DM \cdot DN}{\sqrt{DM^2 + DN^2}} = \frac{6\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}}{\sqrt{(6\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^2}} = 6.$$

Откуда

$$\cos\widehat{D_1DH} = \frac{6}{\sqrt{64+36}} = 0{,}6.$$

Ответ: 0,6.



B11. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание AD равно 15, синус угла BAC равен $\frac{1}{3}$, синус угла ABD равен $\frac{5}{9}$.

Решение. Средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований. Найдем основание BC.

Применим теорему синусов к вписанным треугольникам ABC и ABD:

$$2R = \frac{\sin\widehat{ABD}}{AD} = \frac{\sin\widehat{BAC}}{BC},$$

откуда

$$BC = AD\cdot\frac{\sin\widehat{BAC}}{\sin\widehat{ABD}} = 15\cdot\frac{1}{3}:\frac{5}{9} = 9.$$

Тогда искомая длина средней линии равна $(15+9)/2 = 12$.

Ответ: 12.

C1. Решите уравнение $4\cos x \operatorname{ctg} x + 4\operatorname{ctg} x + \sin x = 0$.

Решение.

$$4\cos x\operatorname{ctg} x + 4\operatorname{ctg} x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(4\cos x\operatorname{ctg} x + 4\operatorname{ctg} x + \sin x)\sin x = 0,\\ \sin x \neq 0.\end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$(4\cos x\operatorname{ctg} x + 4\operatorname{ctg} x + \sin x)\sin x = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x + 4\cos x + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x + 4\cos x + 1 - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -\frac{1}{3},\\ \cos x = -1.\end{array}\right.$$

Далее имеем:

1. $\begin{cases}\cos x = -\frac{1}{3},\\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x = \pm(\pi - \arccos\frac{1}{3}) + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

2. $\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$ Эта система не имеет решений.

Ответ: $x = \pm(\pi - \arccos\frac{1}{3}) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С1
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) преобразование уравнения в систему, равносильную данному уравнению; 2) решение полученной системы. Все тождественные преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. При решении допущена одна описка или негрубая ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения (например, вычислительная ошибка). В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

С2. При каких значениях x соответствующие значения функций $f(x) = \log_2 x$ и $g(x) = \log_2(3-x)$ будут отличаться меньше, чем на 1?

Решение. Искомое множество значений переменной x совпадает с множеством решений неравенства $|\log_2 x - \log_2(3-x)| < 1$. Решим это неравенство:

$$|\log_2 x - \log_2(3-x)| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x - \log_2(3-x) < 1, \\ \log_2 x - \log_2(3-x) > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < \log_2(2(3-x)), \\ \log_2(2x) > \log_2(3-x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

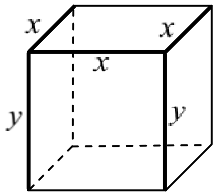
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 6 - 2x, \\ 2x > 3 - x, \\ 0 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2\,.$$

Ответ: $(1; 2)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С2
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) составление неравенства, содержащего знак модуля, или двойного неравенства, соответствующего условию задачи; 2) решение составленного неравенства. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. В шаге 2 допущена вычислительная ошибка и/или описка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

Часть 3

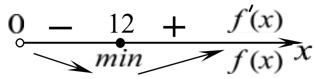
С3. Для монтажа оборудования необходима подставка объемом 1296 дм^3 в форме прямоугольного параллелепипеда. Квадратное основание подставки будет вмонтировано в пол, а ее задняя стенка — в стену цеха. Для соединения подставки по ребрам, не вмонтированным в пол или стену, используется сварка. Определите размеры подставки, при которых общая длина сварочного шва будет наименьшей.



Решение. Обозначим через x стороны основания подставки, а через y ее высоту (см. рисунок). Тогда, по условию, $x^2 y = 1296$, откуда $y = 1296 / x^2$. Общая длина сварочного шва задается формулой $l = 3x + 2y$, где $x > 0$, $y = 1296 / x^2$. Таким образом $l = 3x + 2592 / x^2$.

Найдем наименьшее значение функции $f(x) = 3x + \dfrac{2592}{x^2}$ на промежутке $(0; +\infty)$:

$$f'(x) = \left(3\left(x + \frac{864}{x^2}\right)\right)' = 3\left(1 - \frac{1728}{x^3}\right),\ f'(x) = 0\ ,\ x = 12\ ,\ f_{\min} = f(12)\ .$$



Поскольку $x = 12$ единственная точка экстремума непрерывной на промежутке $(0; +\infty)$ функции $f(x)$, наименьшее значение функции $f(x)$ на этом промежутке равно $f(12)$. Таким образом, общая длина сварочного шва будет наименьшей, если $x = 12$, $y = 1296 / 144 = 9$.

Ответ: общая длина сварочного шва будет наименьшей, если длина стороны основания подставки будет равна 12 дм, а ее высота — 9 дм.

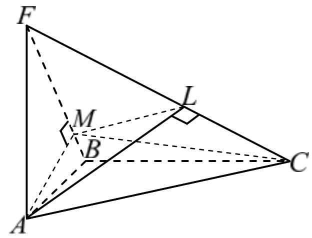
Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) введены буквенные переменные, через которые выражена длина шва и для которых составлены все необходимые соотношения; 2) сконструирована функция и найдена ее критическая точка; 3) приведено обоснование того факта, что в найденной критической точке функция принимает свое наименьшее значение; 4) указаны все размеры подставки, при которых общая длина сварочного шва будет наименьшей. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Получен ответ. Допустимо отсутствие шага 3. Допустима описка и вычислительная ошибка, в результате которых может быть получен неверный ответ.
2	Верно выполнены шаги 1) и 2), а остальные – или отсутствуют или выполнены с ошибкой. Ответ не получен или неверен.
1	Верно выполнен один из шагов 1) или 2), а остальные шаги отсутствуют или выполнены с ошибкой. Допустимо отсутствие ответа.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 — 4 балла.

С4. Основанием пирамиды *FABC* является треугольник *ABC*, в котором $\angle ABC = 90°$, $AB = 3$, $BC = 4$. Ребро *AF* перпендикулярно плоскости *ABC* и равно 4. Отрезки *AM* и *AL* являются соответственно высотами треугольников *AFB* и *AFC*. Найдите объем пирамиды *AMLC*.

Решение. Пусть *FABC* — данная пирамида (см. рисунок).

1. Так как $AF \perp (ABC)$, то, согласно определению прямой, перпендикулярной плоскости, $AF \perp AB$ и $AF \perp AC$.

2. Прямая AB является проекцией прямой FB на плоскость ABC и $BC \perp AB$, следовательно, $BC \perp FB$ по теореме о трех перпендикулярах.



3. Прямая BC перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB и BF плоскости ABF, следовательно, $BC \perp (ABF)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

4. Так как $BC \perp (ABF)$ и $AM \subset (ABF)$, то, согласно определению прямой, перпендикулярной плоскости, $BC \perp AM$.

5. Прямая AM перпендикулярна двум пересекающимся прямым BC и BF плоскости BCF, следовательно, $AM \perp (BCF)$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, т.е. $AM \perp (CLM)$, откуда $AM \perp LM$.

6. Прямая LM является проекцией прямой AL на плоскость CLM и $AL \perp CL$, следовательно, $LM \perp CL$ по теореме о трех перпендикулярах.

7. Далее находим:

а) из прямоугольного треугольника ABC: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$;

б) из прямоугольного треугольника ABF: $BF = \sqrt{AB^2 + AF^2} = 5$, $AM = \dfrac{AB \cdot AF}{BF} = \dfrac{12}{5}$;

в) из прямоугольного треугольника ACF: $CF = \sqrt{AC^2 + AF^2} = \sqrt{41}$, $AL = \dfrac{AC \cdot AF}{CF} = \dfrac{20}{\sqrt{41}}$;

г) из прямоугольного треугольника ACL: $CL = \sqrt{AC^2 - AL^2} = \dfrac{25}{\sqrt{41}}$;

д) из прямоугольного треугольника ALM: $LM = \sqrt{AL^2 - AM^2} = \dfrac{64}{5\sqrt{41}}$.

Окончательно имеем $V_{AMLC} = \dfrac{1}{3} S_{CLM} AM = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} CL \cdot LM \cdot AM = \dfrac{25 \cdot 64 \cdot 12}{6\sqrt{41} \cdot 5\sqrt{41} \cdot 5} = \dfrac{128}{41}$.

Ответ: $\dfrac{128}{41}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) установлено, что AM— высота пирамиды $AMLC$; 2) доказано, что ACF, ABF, ABL, ALM — прямоугольные треугольники; 3) вычислен объема пирамиды $AMLC$. Верно приведены ссылки на используемые при доказательстве положения теории: а) признак перпендикулярности прямой и плоскости; б) определение прямой, перпендикулярной плоскости; в) теорема о трех перпендикулярах. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведены все шаги решения 1) — 3). Приведены ссылки на используемые при доказательстве положения теории а) – в). Допустимы отсутствие обоснований ключевых моментов или неточности в обоснованиях. [1] Допустимы одна описка и/или вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.

[1] Неточностью в обоснованиях является замена свойства на определение, свойства на признак или наоборот, а также неверные названия теорем или формул.

2	Приведены все шаги решения 1) — 3). Ссылки на используемые при доказательстве положения теории а) — в) либо отсутствуют, либо приведено только одно из них, но сами эти положения теории использованы при решении. Допустимы описки и/или вычислительные ошибки, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этих ошибок или описок может быть получен неверный ответ.
1	Ход решения правильный, но решение не завершено: имеются шаги 1) и 2) решения, которые отражены и ясно видны на чертеже (в соответствующих треугольниках обозначены углы, равные $90°$ и т.п.) или описаны словесно. Найдены некоторые числовые характеристики пирамид. Приведенные в решении обоснования и вычисления не содержат грубых ошибок
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 — 4 балла.

С5. Шесть чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Первый, второй и четвертый члены этой прогрессии являются решениями неравенства $\log_{0,5x-1}\left(\log_4 \frac{x-11}{x-8}\right) \geq 0$, а остальные *не являются* решениями этого неравенства. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

Решение.

1. Решим неравенство $\log_{0,5x-1}\left(\log_4 \frac{x-11}{x-8}\right) \geq 0$.

Область допустимых значений x совпадает с множеством решений системы

$$\begin{cases} 0,5x-1>0, \\ 0,5x-1\neq 1, \\ \log_4 \dfrac{x-11}{x-8}>0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$\begin{cases} 0,5x-1>0, \\ 0,5x-1\neq 1, \\ \log_4 \dfrac{x-11}{x-8}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ x\neq 4, \\ \log_4 \dfrac{x-11}{x-8}>\log_4 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ x\neq 4, \\ \dfrac{-3}{x-8}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ x\neq 4, \\ x<8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<x<4, \\ 4<x<8. \end{array}\right.$$

Далее имеем:
1) если $2<x<4$, то $0<0,5x-1<1$, откуда

$$\log_{0,5x-1}\left(\log_4 \frac{x-11}{x-8}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \log_{0,5x-1}\left(\log_4 \frac{x-11}{x-8}\right) \geq \log_{0,5x-1} 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_4 \frac{x-11}{x-8} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x-11}{x-8} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{21-3x}{x-8} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 7, \\ x>8. \end{array}\right.$$

Все числа промежутка $(2;4)$ удовлетворяют условию $x\leq 7$, следовательно, они являются решениями данного неравенства;

2) если $4 < x < 8$, то $0{,}5x - 1 > 1$, откуда

$$\log_{0,5x-1}\left(\log_4 \frac{x-11}{x-8}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \log_{0,5x-1}\left(\log_4 \frac{x-11}{x-8}\right) \geq \log_{0,5x-1} 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_4 \frac{x-11}{x-8} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x-11}{x-8} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{21-3x}{x-8} \geq 0 \Leftrightarrow 7 \leq x < 8.$$

В этом случае все числа промежутка $[7; 8)$ являются решениями данного неравенства. Таким образом, множество $(2; 4) \cup [7; 8)$ — множество решений данного неравенства.

2. Пусть $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ — арифметическая прогрессия, d — разность этой прогрессии ($d > 0$ по условию). Согласно условию числа a_1, a_2, a_4 являются решениями данного неравенства, а числа a_3, a_5, a_6 не являются решениями этого неравенства. Числа a_1, a_2, a_4 не могут принадлежать ни промежутку $(2; 4)$, ни промежутку $[7; 8)$, так как в этом случае число a_3 также принадлежало бы одному из этих промежутков. Кроме того, $d > 1{,}5$, иначе промежутку $[4; 7)$ принадлежало бы более одного члена данной прогрессии. Отсюда следует, что промежутку $[7; 8)$ принадлежит только один член прогрессии — a_4, а промежутку $(2; 4)$ первые два члена этой прогрессии — a_1 и a_2.

Далее имеем:

1) $d > 1{,}5$, следовательно, $a_1 < 4 - 1{,}5 = 2{,}5$, откуда $a_1 = 2{,}5 - \alpha$, где $0 < \alpha < 0{,}5$;

2) $d < 4 - a_1 = 4 - (2{,}5 - \alpha) = 1{,}5 + \alpha$.

Покажем, что для любого $a_1 = 2{,}5 - \alpha$, где $0 < \alpha < 0{,}5$; найдется такое $1{,}5 < d < 1{,}5 + \alpha$, что числа a_1, a_2, a_4 являются решениями данного неравенства, а числа a_3, a_5, a_6 не являются решениями этого неравенства.

Положим $d = 1{,}5 + \dfrac{\alpha}{2}$. Тогда:

а) $a_1 = 2{,}5 - \alpha$, $a_2 = a_1 + d = 4 - \dfrac{\alpha}{2}$, откуда $a_1, a_2 \in (2; 4)$;

б) $a_3 = a_2 + d = 5{,}5$, откуда $a_3 \notin (2; 4) \cup [7; 8)$;

в) $a_4 = a_3 + d = 7 + \dfrac{\alpha}{2}$, откуда $a_4 \in [7; 8)$;

г) $a_6 > a_5 = a_4 + d = 8{,}5 + \alpha > 8$, откуда $a_5, a_6 \notin (2; 4) \cup [7; 8)$.

Таким образом, для любого $2 < a < 2{,}5$ найдется возрастающая арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ такая, что числа a_1, a_2, a_4 являются решениями данного неравенства, а числа a_3, a_5, a_6 не являются решениями этого неравенства.

Ответ: $(2; 2{,}5)$.

Баллы	**Критерии оценки выполнения задания С5**
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) решено данное неравенство; 2) доказано, что $d > 1{,}5$; 3) доказано, что $a_1 < 2{,}5$; 4) доказано, что для любого $2 < a < 2{,}5$, найдется возрастающая арифметическая прогрессия, удовлетворяющая условию задачи. Обоснованы все ключевые моменты решения: а) невозможность случая $a_1, a_2, a_4 \in (2; 4)$ и $a_1, a_2, a_4 \in [7; 8)$; б) возможность только такой прогрессия, удовлетворяющей условию задачи, для которой $a_1, a_2, \in (2; 4)$, $a_4 \in [7; 8)$. Получен верный ответ.

3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Обоснованы все ключевые моменты решения. Допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения. В результате этой описки (ошибки) может быть получен неверный ответ.
2	Верно выполнены шаги 1) и 2), а шаги 3) и 4) выполнены неверно, в том числе – неверно обоснованы. Допустимы 1 — 2 вычислительные ошибки, в результате которых может быть получен неверный ответ.
1	Верно выполнен шаг 1) решения, а остальные – либо отсутствуют, либо выполнены неверно.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 — 4 балла.