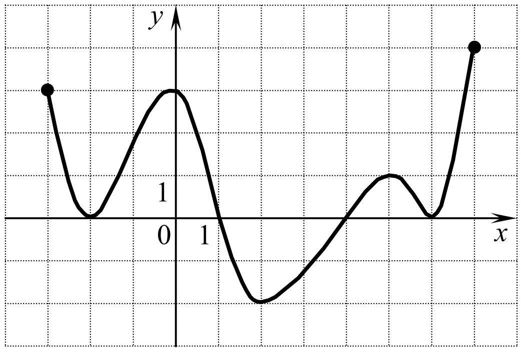
Единый государственный экзамен по математике, 2004 год

Часть А

А1. Функция задана графиком. Укажите промежуток, на котором она принимает только отрицательные значения.



1. $(-3;-2)$
2. $(1;4)$
3. $(-3;0)$
4. $(0;4)$

Решение. Функция отрицательна на тех промежутках, на которых ее график лежит ниже оси абсцисс; для заданной функции это интервал (1; 4).

Правильный ответ: 2.

А2. Найдите множество значений функции $y=\sin x-3$.

1. $[-3;-2]$ **2.** $[-1;1]$ **3.** $(-\infty;+\infty)$ **4.** $[-4;-2]$

Решение. В силу ограниченности функции $y=\sin x$ и свойств неравенств имеем:

$$-1\le \sin x\le 1 \Leftrightarrow -4\le \sin x-3\le -2.$$

Правильный ответ: 4.

А3. Найдите производную функции $y=-\frac{6}{5}x^5+4x^3-12$.

1. $y'=-0,2x^6+x^4-12x$
2. $y'=-6x^4+12x^2$
3. $y'=-6x^4+7x^2$
4. $y'=-6x^4+12x^2-12x$

Решение. Поскольку $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$ и $(const)'=0$, пользуясь правилами дифференцирования, получаем:

$$y'=-\frac{6}{5}\cdot 5\cdot x^4+4\cdot 3\cdot x^2-0=-6x^4+12x^2.$$

Правильный ответ: 2.

А4. Укажите область определения функции $y=\frac{1}{2^{6x-13}-2^5}$.

1. $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)\cup\left(-\frac{4}{3};+\infty\right)$
2. $\left(-\infty;\frac{15}{2}\right)\cup\left(\frac{15}{2};+\infty\right)$
3. $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$
4. $\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$

Решение. Область определения функции задается неравенством $2^{6x-13} - 2^5 \neq 0$. Имеем:

$$2^{6x-13} \neq 2^5 \Leftrightarrow 6x-13 \neq 5 \Leftrightarrow 6x \neq 18 \Leftrightarrow x \neq 3.$$

Правильный ответ: 3.

А5. Вычислите $125^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

1. 7	**2.** 4,5	**3.** 3	**4.** 25,5

Решение. Поскольку $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, имеем:

$$125^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (5^3)^{\frac{1}{3}} + (2^{-1})^{-1} = 5^{3 \cdot \frac{1}{3}} + 2^{(-1)\cdot(-1)} = 5^1 + 2^1 = 5 + 2 = 7.$$

Правильный ответ: 1.

А6. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt[5]{a^{11}}}{\sqrt[5]{a}}$.

1. $a^{\frac{12}{5}}$	**2.** a^5	**3.** a^2	**4.** $a^{\frac{11}{5}}$

Решение. Поскольку $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ и $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, получаем:

$$\frac{\sqrt[5]{a^{11}}}{\sqrt[5]{a}} = a^{\frac{11}{5}} : a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{11}{5}-\frac{1}{5}} = a^{\frac{10}{5}} = a^2.$$

Правильный ответ: 3.

А7. Вычислите $\log_3 \frac{1}{2} + \log_3 6$.

1. 1	**2.** 2	**3.** -1	**4.** 0

Решение. Используя формулу преобразования суммы логарифмов в логарифм произведения, имеем:

$$\log_3 \frac{1}{2} + \log_3 6 = \log_3 \left(\frac{1}{2} \cdot 6\right) = \log_3 3 = 1.$$

Правильный ответ: 1.

A8. Решите неравенство $2^{5x+7} \geq 8^x$.

1. $\left(-\infty; -\dfrac{7}{2}\right]$ **2.** $\left(-\infty; -\dfrac{7}{4}\right)$

3. $\left(-\dfrac{7}{4}; +\infty\right)$ **4.** $\left[-\dfrac{7}{2}; +\infty\right)$

Решение. Перейдем к основанию степени 2 и воспользуемся возрастанием показательной функции, с основанием большим единицы:

$$2^{5x+7} \geq 8^x \Leftrightarrow 2^{5x+7} \geq 2^{3x} \underset{2>1}{\Leftrightarrow} 5x+7 \geq 3x \Leftrightarrow 2x \geq -7 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}.$$

Правильный ответ: 4.

A9. Какому промежутку принадлежит корень уравнения $\log_5(27+x) - \log_5 2 = \log_5(7x)$?

1. (0; 2) **2.** (2; 4)

3. (4; 6) **4.** (−3; 0)

Решение. Пользуясь теоремами равносильности, последовательно получаем:

$$\log_5(27+x) - \log_5 2 = \log_5(7x) \Leftrightarrow \log_5(27+x) = \log_5 2 + \log_5(7x) \Leftrightarrow \log_5(27+x) = \log_5(14x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14x > 0, \\ 27 + x = 14x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 27 = 13x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x = \dfrac{27}{13} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\frac{1}{13}.$$

Найденный корень принадлежит промежутку (2; 4).

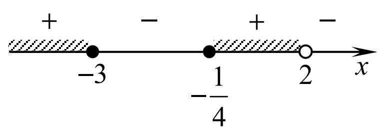
Правильный ответ: 2.

A10. Решите неравенство $\dfrac{(1+4x)(x+3)}{2-x} \geq 0$.

1. $(2; +\infty)$ **2.** $(-\infty; -3] \cup \left[-\dfrac{1}{4}; 2\right)$

3. $(-\infty; -3]$ **4.** $\left[-3; -\dfrac{1}{4}\right] \cup (2; +\infty)$

Решение. Решим данное неравенство методом интервалов (см. рис.):



Правильный ответ: 2.

A11. Решите уравнение $\sin(\pi - x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.	$\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$	**2.**	$\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
3.	$(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$	**4.**	$\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Решение. Последовательно получаем:

$$\sin(\pi - x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Правильный ответ: 3.

A12. К графику функции $f(x) = 3x^2 + 5x - 15$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{1}{6}$ проведена касательная. Найдите тангенс угла наклона касательной к оси *Ox*.

1.	6	**2.**	11
3.	7	**4.**	4

Решение. Тангенс угла наклона к оси *Ox* касательной к графику функции, проведенной в его точке с абсциссой x_0, равен значению производной данной функции в точке x_0. Найдем производную и вычислим ее значение в заданной точке:

$$f'(x) = (3x^2 + 5x - 15)' = 6x + 5.$$

$$f'(x_0) = 6 \cdot \frac{1}{6} + 5 = 6.$$

Правильный ответ: 1.

A13. Найдите значение $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$.

1.	-2	**2.**	2
3.	$\frac{1}{2}$	**4.**	$-\frac{1}{2}$

Решение. Поскольку число α лежит во второй координатной четверти, его косинус отрицателен, откуда

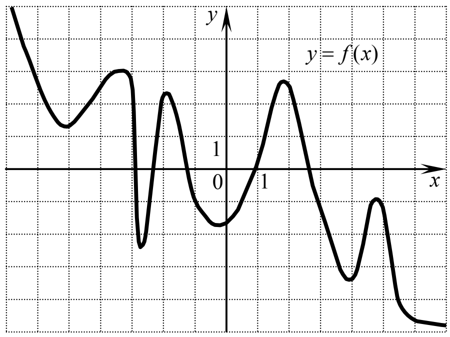
$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}} : \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{2}.$$

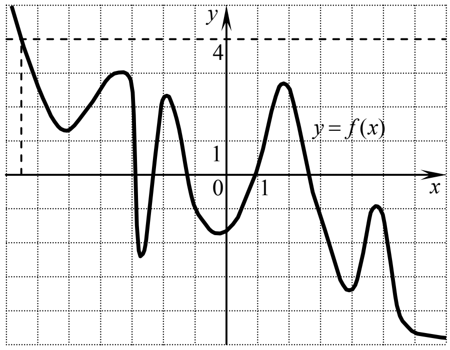
Правильный ответ: 4.

А14. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Какому из следующих промежутков принадлежит корень уравнения $f(x) - 4 = 0$?



1. $(2; 3)$
2. $(5; 6)$
3. $(-7; -6)$
4. $(-4; -3)$

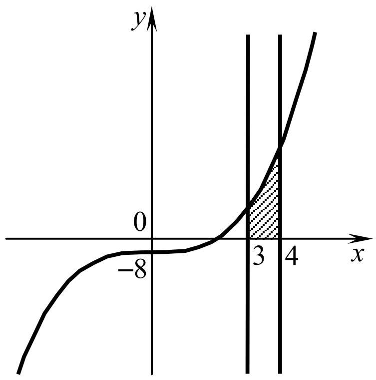
Решение. Уравнение $f(x) - 4 = 0$ равносильно уравнению $f(x) = 4$. Найдем точку графика с ординатой равной 4, и определим ее абсциссу (см. рис.). Найденное число лежит в промежутке $(-7; -6)$.



Правильный ответ: 3.

Часть В

В1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3 - 8$, $x = 3$, $x = 4$, $y = 0$.

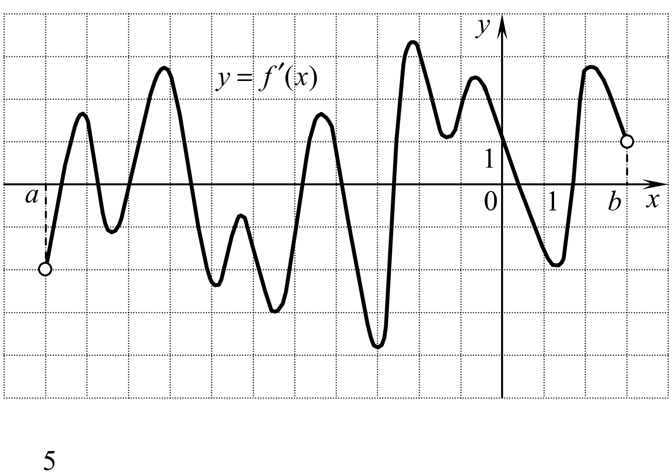


Решение. Изобразим на рисунке эскизы графиков функций $y = x^3 - 8$, $y = 0$, и прямые $x = 3$, $x = 4$. Фигура, площадь которой требуется найти, на рисунке заштрихована. Площадь этой фигуры S дается формулой $S = \int\limits_3^4 y(x)dx$:

$$S = \int\limits_3^4 (x^3 - 8)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 8x\right)\Bigg|_3^4 = \left(\frac{4^4}{4} - 8\cdot 4\right) - \left(\frac{3^4}{4} - 8\cdot 3\right) = 35\frac{3}{4} = 35,75.$$

Правильный ответ: 35,75.

В2. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(a; b)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите число точек максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(a; b)$.



Решение. Дифференцируемая функция достигает максимума в некоторой точке, если в левой полуокрестности этой точки ее производная положительна, а в правой — отрицательна. На заданном графике таких точек четыре.

Правильный ответ: 4.

B3. Найдите значение выражения $\sqrt{19}\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$, если $\cos x=\frac{4}{\sqrt{19}}$ и $\pi\le x\le 2\pi$.

Решение. Поскольку $\pi\le x\le 2\pi$, имеем:

$$\sin x=-\sqrt{1-\cos^2 x}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{\sqrt{19}}\right)^2}=-\sqrt{\frac{3}{19}}\,.$$

Далее, используя формулу $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$, получаем:

$$\sqrt{19}\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sqrt{19}\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)=\sqrt{19}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{19}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\right)\right)=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}=0,5\,.$$

Правильный ответ: 0,5.

B4. Сколько корней имеет уравнение $(\sin^4 x-\cos^4 x)\cdot\log_2(1-x^2)=0$?

Решение. Поскольку $\sin^4 x-\cos^4 x=(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sin^2 x-\cos^2 x=-\cos 2x$, получаем:

$$(\sin^4 x-\cos^4 x)\cdot\log_2(1-x^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2(1-x^2)=0,\\ \begin{cases}\sin^4 x-\cos^4 x=0,\\ 1-x^2>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-x^2=1;\\ \begin{cases}\cos 2x=0,\\ -1<x<1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;\\ \begin{cases}2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ -1<x<1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;\\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\\ -1<x<1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;\\ x=-\frac{\pi}{4};\\ x=\frac{\pi}{4}.\end{array}\right.$$

Таким образом, данное уравнение имеет три корня.

Правильный ответ: 3.

B5. Найдите точку минимума функции $f(x)=\log_2(x^2-7x+13)$.

Решение. Поскольку логарифмическая функция с основанием большим единицы монотонно возрастает, точка минимума заданной функции совпадает с точкой минимума квадратного трехчлена $g(x)=x^2-7x+13$, если он положителен в этой точке. Квадратный трехчлен $g(x)=ax^2+bx+c$ с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{\min}=-\frac{b}{2a}$. В нашем случае: $x_{\min}=\frac{7}{2}$, тогда

$$g_{\min}=g\left(\frac{7}{2}\right)=\left(\frac{7}{2}\right)^2-7\cdot\frac{7}{2}+13=\frac{3}{4}>0\,.$$

Таким образом, число 3,5 — искомая точка минимума функции $f(x)$.

Правильный ответ: 3,5.

B6. Укажите наибольшее целое число из области определения функции $y = (35 - |3x - 11|)^{-0,5}$.

Решение. Область определения данной функции задается неравенством $35 - |3x - 11| > 0$. Решим его:

$$35 - |3x - 11| > 0 \Leftrightarrow |3x - 11| < 35 \Leftrightarrow -35 < 3x - 11 < 35 \Leftrightarrow -24 < 3x < 46 \Leftrightarrow -8 < x < 15\frac{1}{3}.$$

Тем самым область определения данной функции есть интервал $\left(-8;\ 15\frac{1}{3}\right)$. Наибольшее целое число из этого интервала равно 15.

Правильный ответ: 15.

B7. На каждый из нескольких опытных участков внесли два удобрения. Первое вносили по такой схеме: 0,5 кг — на первый участок, а на каждый следующий участок на 0,5 кг больше, чем на предыдущий. Второе удобрение вносили по 3 кг на каждый участок. Всего внесли 42 кг удобрений. На сколько участков внесли удобрения?

Решение. Пусть искомое число участков n. Используя формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n$, получим количество внесенных килограммов первого удобрения:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \ldots + \frac{n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2}\right)n = \frac{n^2 + n}{4}.$$

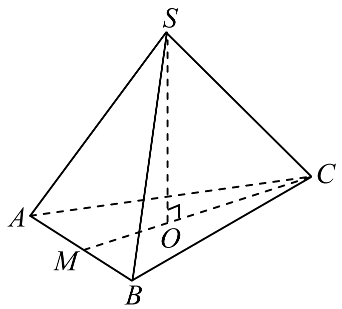
Поскольку второго удобрения внесли $3n$ кг, а всего внесли 42 кг удобрений имеем уравнение: $\frac{n^2 + n}{4} + 3n = 42$, откуда:

$$\frac{n^2 + n}{4} + 3n = 42 \Leftrightarrow n^2 + n + 12n = 168 \Leftrightarrow n^2 + 13n - 168 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -21; \\ n = 8 \end{array}\right. \underset{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n = 8.$$

Таким образом, удобрения внесли на 8 участков.

Правильный ответ: 8.

B8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания равна $6\sqrt{3}$, а боковое ребро наклонено к плоскости основания ABC под углом, тангенс которого равен $\frac{4}{3}$. Найдите площадь треугольника MSC, где M — середина отрезка AB.



Решение. Пусть SO — высота пирамиды (см. рис.). Поскольку пирамида правильная, ее основанием является равносторонний треугольник, а точка O — его центр, $O \in CM$.

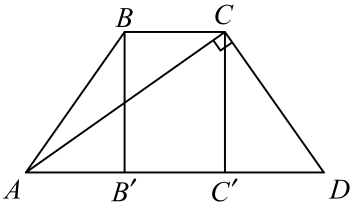
Отрезок CM — медиана, и, следовательно, высота правильного треугольника ABC, откуда $CM = BC \cdot \sin\widehat{CBM} = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9$.

Отрезок CO – радиус окружности, описанной около треугольника ABC, следовательно, $CO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 6$.

Поскольку угол между боковым ребром и плоскостью основания есть угол между наклонной SC и ее проекцией на плоскость основания CO, имеем $SO = CO \cdot \operatorname{tg}\widehat{SCO} = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$.

Окончательно имеем: $S_{MSC} = \frac{1}{2} MC \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 = 36$.

Правильный ответ: 36.



B9. В равнобедренной трапеции основания равны 9 и 15, диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите площадь трапеции.

Решение. Пусть $ABCD$ — заданная трапеция, $AD = 15$, $BC = 9$, BB' и CC' — высоты трапеции (см. рис.).

Заданная трапеция равнобедренная, поэтому:

$$AB' = C'D = \frac{AD - BC}{2} = 3,$$
$$AC' = AD - C'D = 12.$$

Отрезок CC' – высота прямоугольного треугольника ACD, опущенная из вершины прямого угла C на гипотенузу AD, откуда

$$CC' = \sqrt{AC' \cdot C'D} = \sqrt{12 \cdot 3} = 6.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CC' = \frac{15 + 9}{2} \cdot 6 = 72.$$

Правильный ответ: 72.

Часть C

C1. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{6x - 2y - 7} = \dfrac{3x - y}{4} + 1, \\ \dfrac{x - 11y - 8}{3x - y - 16} = x - y. \end{cases}$

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы. Пусть $\frac{3x - y}{4} = t$, тогда $3x - y = 4t$, $6x - 2y = 8t$ и уравнение принимает вид $\sqrt{8t - 7} = t + 1$. Имеем:

$$\sqrt{8t - 7} = t + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t + 1 \ge 0, \\ 8t - 7 = (t + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -1, \\ t^2 - 6t + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -1, \\ \left[\begin{array}{l} t = 4; \\ t = 2 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4; \\ t = 2. \end{array} \right.$$

Таким образом, возможны два случая: $3x - y = 16$ или $3x - y = 8$.

Если $3x-y=16$ система не имеет решений, так как знаменатель левой части второго уравнения обращается в нуль.

Рассмотрим случай $3x-y=8$. Имеем:

$$\begin{cases}3x-y=8,\\ \dfrac{x-11y-8}{3x-y-16}=x-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3x-8,\\ \dfrac{x-11(3x-8)-8}{8-16}=x-(3x-8)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3x-8,\\ \dfrac{-32x+80}{-8}=-2x+8\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=3x-8,\\ 4x-10=-2x+8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3x-8,\\ 6x=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1,\\ x=3.\end{cases}$$

Таким образом, исходная система уравнений имеет одно решение: $(3;\ 1)$.

Ответ: $(3;\ 1)$.

С2. Найдите наименьшее значение периметра прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и с диагональю *OM*, где *O* — начало координат, а *M* — точка на графике функции $y=1-3\ln(0,25x-2)$, $9\le x\le 11,5$.

Решение. Пусть абсцисса точки *M* равна *x*, тогда ее ордината *y* равна $1-3\ln(0,25x-2)$.

Заметим, что функция $g(x)=3\ln(0,25x-2)$ возрастает на своей области определения — открытом луче $(8;\ +\infty)$, и обращается в нуль в точке 12. Поэтому заданная функция $y=1-3\ln(0,25x-2)$ убывает промежутке $(8;\ 12)$ и принимает на только положительные значения. Это означает, что для всех *x* из отрезка $[9;\ 11,5]$ точка $M(x;\ y)$ лежит в первой четверти.

Тогда, периметр прямоугольника равен $2x+2y=2x+2-6\ln\left(0,25x-2\right)$. Осталось найти наименьшее значение функции $p(x)=2x-6\ln(0,25x-2)+2$ на отрезке $[9;\ 11,5]$.

Найдем производную функции $p(x)$:

$$p'(x)=2-6\frac{1}{0,25x-2}\cdot 0,25=2-\frac{6}{x-8}=\frac{2x-22}{x-8}.$$

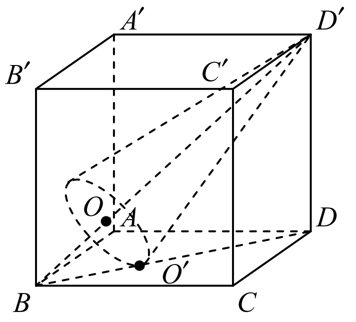
Найденная производная обращается в нуль в точке $x=11$, отрицательна на полуинтервале $[9;\ 11)$ и положительна на полуинтервале $(11;\ 11,5]$. Тем самым точка $x=11$ — точка минимума, причем это единственная точка экстремума непрерывной на заданном отрезке функции. Поэтому $p(11)$ есть наименьшее на отрезке $[9;\ 11,5]$ значение исследуемой функции. Найдем его:

$$p(11)=2x-6\ln(0,25x-2)+2\Big|_{x=11}=22-6\ln\left(\frac{11}{4}-2\right)+2=24-6\ln\frac{3}{4}.$$

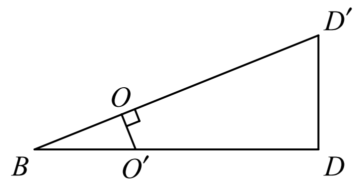
Таким образом, наименьшее значение периметра прямоугольника равно $24-6\ln\dfrac{3}{4}$.

Ответ: $24-6\ln\dfrac{3}{4}$.

С3. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с ребром, равным $2\sqrt{3}$, расположен конус. Вершина конуса находится в точке D', а центр его основания, точка O, лежит на диагонали BD' так, что $\frac{BO}{OD'}=\frac{1}{3}$. Окружность основания конуса имеет с каждой гранью, содержащей точку B, ровно по одной общей точке. Определите объем конуса.



Решение. Длина диагонали основания куба равна $BD=\sqrt{2}BC=2\sqrt{6}$; длина диагонали куба равна $BD'=\sqrt{3}BC=\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}=6$, тогда $BO=\frac{1}{4}BD'=\frac{3}{2}$, $OD'=\frac{3}{4}BD'=\frac{9}{2}$ — это длина высоты конуса.



Пусть точка O' – точка касания основания конуса с основанием $ABCD$ данного куба. Рассмотрим сечение куба и конуса плоскостью $BB'D'D$. Эта плоскость является плоскостью симметрии как квадрата $ABCD$, так и окружности основания конуса. Окружность основания конуса имеет с гранью $ABCD$ ровно одну общую точку, следовательно, эта точка принадлежит плоскости симметрии, откуда следует, что точка O' лежит на диагонали основания BD.

Поскольку прямоугольные треугольники BOO' и BDD' имеют общий угол B, они подобны, что позволяет найти радиус основания конуса — отрезок OO' (см. рис.):

$$\frac{DD'}{BD}=\frac{OO'}{BO}\Leftrightarrow OO'=\frac{DD'\cdot BO}{BD}=\frac{2\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}}{2\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Тогда

$$V_{кон.}=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi\cdot(OO')^2\cdot OD'=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{18}{16}\cdot\frac{9}{2}=\frac{27}{16}\pi.$$

Ответ: $\frac{27}{16}\pi$.

С4. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $|ax+3|x|-5|<1$ содержится в некотором отрезке длиной 20 и при этом содержит какой-нибудь отрезок длиной 10.

Решение. Решим данное неравенство при $a>0$:

$$|ax+3|x|-5|<1\Leftrightarrow -1<ax+3|x|-5<1\Leftrightarrow 4<ax+3|x|<6.$$

Если $x\geq 0$, имеем

$$4<ax+3x<6\Leftrightarrow 4<x(a+3)<6\underset{a+3>0}{\Leftrightarrow}\frac{4}{a+3}<x<\frac{6}{a+3},$$

причем, все числа из интервала $\left(\frac{4}{a+3};\ \frac{6}{a+3}\right)$ удовлетворяют условию $x\geq 0$.

Если $x<0$, имеем

$$4<ax-3x<6\Leftrightarrow 4<x(a-3)<6.$$

В зависимости от знака выражения $a-3$, рассмотрим два случая:

а) если $a \geq 3$, то неравенство $4 < x(a-3) < 6$, а вместе с ним и исходное неравенство не имеют отрицательных решений;

б) если $a < 3$, имеем

$$4 < x(a-3) < 6 \Leftrightarrow \frac{4}{a-3} > x > \frac{6}{a-3} \Leftrightarrow \frac{6}{a-3} < x < \frac{4}{a-3},$$

причем все числа из интервала $\left(\frac{6}{a-3};\ \frac{4}{a-3}\right)$, удовлетворяют условию $x < 0$.

Таким образом, при $a \geq 3$ множество решений заданного неравенства есть интервал $\left(\frac{4}{a+3};\ \frac{6}{a+3}\right)$, а при $0 < a < 3$ — объединение интервалов: $\left(\frac{6}{a-3};\ \frac{4}{a-3}\right) \cup \left(\frac{4}{a+3};\ \frac{6}{a+3}\right)$.

Осталось определить, при каких значениях параметра множество решений содержится в некотором отрезке длиной 20 и при этом содержит какой-нибудь отрезок длиной 10.

Поскольку $\frac{6}{a+3} - \frac{4}{a+3} = \frac{2}{a+3} < \frac{2}{3}$ при $a > 0$, интервал $\left(\frac{4}{a+3};\ \frac{6}{a+3}\right)$ не содержит ни одного отрезка длиной 10. Следовательно, значения $a \geq 3$ не удовлетворяют условию задачи.

Множество $\left(\frac{6}{a-3};\ \frac{4}{a-3}\right) \cup \left(\frac{4}{a+3};\ \frac{6}{a+3}\right)$ содержится в некотором отрезке длиной 20 и при этом содержит какой-нибудь отрезок длиной 10, тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два условия $\frac{6}{a+3} - \frac{6}{a-3} \leq 20$ и $\frac{4}{a-3} - \frac{6}{a-3} \geq 10$. Решим соответствующую систему для $0 < a < 3$:

$$\begin{cases} \frac{6}{a+3} - \frac{6}{a-3} \leq 20, \\ \frac{4}{a-3} - \frac{6}{a-3} \geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-36}{a^2-9} \leq 20, \\ \frac{-2}{a-3} \geq 10 \end{cases} \underset{0<a<3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -36 \geq 20(a^2-9), \\ -2 \leq 10(a-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \leq 7{,}2, \\ a \geq 2{,}8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{7{,}2} < a \leq \sqrt{7{,}2}, \\ a \geq 2{,}8 \end{cases} \underset{a>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 0 < a \leq \sqrt{7{,}2}, \\ a \geq 2{,}8. \end{cases}$$

Полученная система не имеет решений, поскольку $\sqrt{7{,}2} < 2{,}8 \Leftrightarrow 7{,}2 < 7{,}84$. Это означает, что множество решений неравенства $|ax + 3|x| - 5| < 1$ не может одновременно содержаться в отрезке длины 20 и содержать отрезок длины 10.

Ответ: таких значений параметра *a* не существует.