Единый государственный экзамен по математике, 2005 год
демонстрационная версия

Часть 1

А1. Вычислите $-15\cdot 81^{\frac{1}{4}}-19$.

1. -154 **2.** 116 **3.** -64 **4.** 26

Решение. Воспользуемся формулой $(a^x)^y = a^{xy}$:

$$-15\cdot 81^{\frac{1}{4}}-19=-15\cdot(3^4)^{\frac{1}{4}}-19=-15\cdot 3-19=-64.$$

Правильный ответ: 3.

А2. Упростите выражение $\sqrt[3]{25b^2}\cdot\sqrt[3]{5b^4}$.

1. $5b^2$ **2.** $25b$ **3.** $\sqrt[3]{5b^2}$ **4.** $5b$

Решение. Воспользуемся формулами $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ и $\sqrt[n]{a^n}=a$ для $a\ge 0$. Получаем:

$$\sqrt[3]{25b^2}\cdot\sqrt[3]{5b^4}=\sqrt[3]{125b^6}=\sqrt[3]{(5b^2)^3}=5b^2.$$

Правильный ответ: 1.

А3. Найдите значение выражения $\log_5 b$, если $\log_5 b^4=16$.

1. 64 **2.** 2 **3.** 12 **4.** 4

Решение. Поскольку $\log_a b^c = c\log_a|b|$ получаем:

$$\log_5 b^4=16 \Leftrightarrow 4\log_5 b=16 \Leftrightarrow \log_5 b=4.$$

Правильный ответ: 4.

А4. Найдите значение $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$.

1. $\frac{1}{2}$ **2.** 2 **3.** $-\frac{1}{2}$ **4.** -2

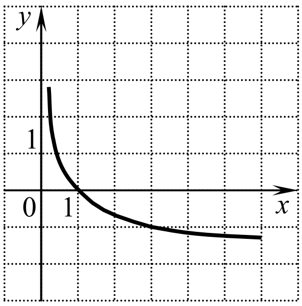
Решение. Поскольку $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$, имеем: $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = -\frac{\sqrt{1-\frac{1}{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = -\frac{\sqrt{\frac{4}{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} : \frac{1}{\sqrt{5}} = -2 .$$

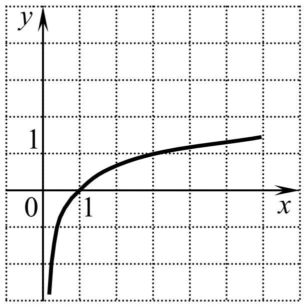
Правильный ответ: 4.

А5. На одном из рисунков изображен график функции $y = \log_3 x$. Укажите этот рисунок.

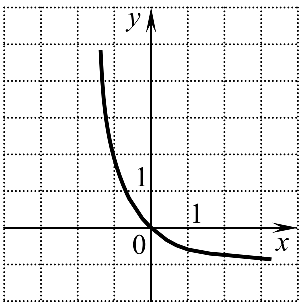
1.



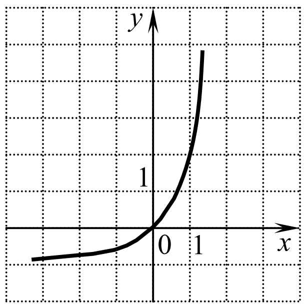
2.



3.



4.



Решение. График функции $y = \log_3 x$ изображен на рисунке 2.

Правильный ответ: 2.

А6. Найдите производную функции $y = e^x + 3x^2$.

1. $y' = xe^{x-1} + 6x$ **2.** $y' = e^x + x^3$
3. $y' = e^x + 5x^2$ **4.** $y' = e^x + 6x$

Решение. Используя табличные производные $(e^x)' = e^x$; $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ и правила дифференцирования, получаем:

$$y' = (e^x + 3x^2)' = e^x + 6x .$$

Правильный ответ: 4.

А7. Какое из следующих чисел входит в множество значений функции $y = 2^x + 4$?

1. 5 **2.** 2 **3.** 3 **4.** 4

Решение. Множество значений показательной функции — открытый луч $(0;\ +\infty)$. Имеем:

$$0 < 2^x < +\infty \Leftrightarrow 4 < 2^x + 4 < +\infty .$$

Таким образом, множество значений заданной функции — промежуток $(4;+\infty)$. Найденному промежутку принадлежит число 5.

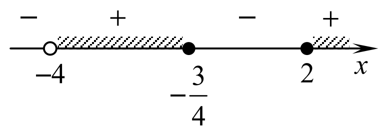
Правильный ответ: 1.

A8. Решите неравенство $\dfrac{(x-2)(4x+3)}{x+4} \geq 0$.

1.	$\left[-4;-\dfrac{3}{4}\right] \cup (2;+\infty)$	**2.**	$(-\infty;-4) \cup \left[-\dfrac{3}{2};2\right]$
3.	$\left(-4;-\dfrac{3}{4}\right] \cup [2;+\infty)$	**4.**	$\left(-\infty;-\dfrac{3}{4}\right] \cup (2;+\infty)$

Решение. Решим неравенство методом интервалов (см. рис.):

$$\frac{(x-2)(4x+3)}{x+4} \geq 0.$$



Правильный ответ: 3.

A9. Решите уравнение $\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

1.	$\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$	**2.**	$(-1)^k \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
3.	$\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$	**4.**	$\pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Решение. Последовательно получаем:

$$\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Правильный ответ: 2.

A10. Укажите область определения функции $y = \sqrt{3 - \lg x}$.

1.	$(0;3]$	**2.**	$(0;1000]$	**3.**	$(3;1000]$	**4.**	$[1000;+\infty)$

Решение. Область определения функции задается неравенством $3 - \lg x \geq 0$. Решая его, последовательно получаем:

$$3 - \lg x \geq 0 \Leftrightarrow \lg x \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 10^3, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 1000.$$

Правильный ответ: 2.

B1. Решите уравнение $3^{4x+5} = 81$.

Решение. Последовательно получаем:

$$3^{4x+5} = 81 \Leftrightarrow 3^{4x+5} = 3^4 \Leftrightarrow 4x + 5 = 4 \Leftrightarrow 4x = -1 \Leftrightarrow x = -0{,}25.$$

Ответ: –0,25.

B2. Решите уравнение $x-\sqrt{2x^2-9x+5}=3$.

Решение. Последовательно получаем:

$$x-\sqrt{2x^2-9x+5}=3 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-9x+5}=x-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3\ge 0 \\ 2x^2-9x+5=(x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ x^2-3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: 4.

B3. Тело движется по прямой так, что расстояние S (в метрах) от него до точки M этой прямой изменяется по закону $S(t)=t^2+t+2$ (t – время движения в секундах). Через сколько секунд после начала движения мгновенная скорость тела будет равна 5 м/с?

Решение. Найдем закон изменения скорости:

$$v(t)=S'(t)=(t^2+t+2)'=2t+1 \text{ м/с.}$$

Найдем момент времени, когда $v(t)=5$:

$$v(t)=5 \Leftrightarrow 2t+1=5 \Leftrightarrow 2t=4 \Leftrightarrow t=2 \text{ с.}$$

Ответ: 2.

Часть 2

B4. Вычислите $6\log_2 125\cdot\log_5 2+2^{\lg 7}\cdot 5^{\lg 7}$.

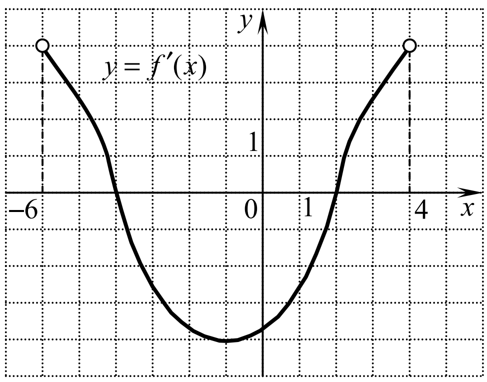
Решение. Пользуясь формулами $a^x b^x=(ab)^x$, $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$, $\dfrac{\log_a b}{\log_a c}=\log_b c$ и основным логарифмическим тождеством $a^{\log_b a}=b$, находим:

$$6\log_2 125\cdot\log_5 2+2^{\lg 7}\cdot 5^{\lg 7}=6\log_2 5^3\cdot\frac{1}{\log_2 5}+(2\cdot 5)^{\lg 7}=$$

$$=18\frac{\log_2 5}{\log_2 5}+7=18+7=25.$$

Ответ: 25.

B5. Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-6;\,4)$. График ее производной изображен на рисунке. Укажите точку минимума функции $y=f(x)$ на этом промежутке.



Решение. В точке, где производная меняет свой знак с минуса на плюс, функция имеет минимум. На приведенном графике единственная такая точка имеет абсциссу 2.

Ответ: 2.

B6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1$, $x=1$, $x=4$ и $y=0$.

Решение. Поскольку функция $y = x^2 + 1$ неотрицательна на отрезке $[0;4]$, искомая площадь вычисляется следующим образом:

$$S = \int_1^4 (x^2+1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\cdot 4^3 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{63}{3} + 3 = 21 + 3 = 24.$$

Ответ: 24.

В7. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{(x-3)^4} + \sqrt[4]{\left(x - \frac{15}{2}\right)^4}$, если $\frac{31}{10} \le x \le \frac{36}{5}$.

Решение. Упростим выражение, используя свойства арифметического корня:

$$\sqrt[4]{(x-3)^4} + \sqrt[4]{\left(x - \frac{15}{2}\right)^4} = |x-3| + \left|x - \frac{15}{2}\right|.$$

Поскольку все числа промежутка $\left[\frac{31}{10}; \frac{36}{5}\right]$ удовлетворяют как условию $x \ge 3$, так и условию $x \le \frac{15}{2}$, согласно определению модуля на этом промежутке имеем:

$$|x-3| + \left|x - \frac{15}{2}\right| = (x-3) + \left(\frac{15}{2} - x\right) = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5.

В8. Найдите наибольшее целое значение функции $y = 25\cdot 3^{\cos 4x \cos 3x + \sin 4x \sin 3x - 2}$.

Решение. Упростим данное выражение, используя формулу $\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta = = \cos(\alpha - \beta)$:

$$y = 25\cdot 3^{\cos 4x \cos 3x + \sin 4x \sin 3x - 2} = 25\cdot 3^{\cos(4x-3x)-2} = 25\cdot 3^{\cos x - 2}.$$

Далее имеем:

$$-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow -3 \le \cos x - 2 \le -1 \Leftrightarrow 3^{-3} \le 3^{\cos x - 2} \le 3^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{27} \le 3^{\cos x - 2} \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{25}{27} \le 25\cdot 3^{\cos x - 2} \le \frac{25}{3}.$$

Таким образом, множество значений данной функции есть отрезок $\left[\frac{25}{27}; \frac{25}{3}\right]$. Наибольшим целым числом, принадлежащим отрезку $\left[\frac{25}{27}; \frac{25}{3}\right]$, является число 8.

Ответ: 8.

В9. Торговая база закупила партию альбомов и поставила ее магазину по оптовой цене, которая на 30 % больше закупочной. Магазин установил розничную цену на альбом на 20 % выше оптовой. При распродаже в конце сезона магазин снизил розничную цену на альбом на 10 %. На сколько рублей больше заплатил покупатель по сравнению с закупочной ценой, если на распродаже он приобрел альбом за 70,2 рубля?

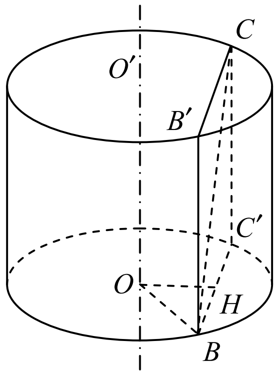
Решение. Пусть закупочная цена есть x рублей, тогда оптовая цена — $1{,}3x$, розничная цена составляет $1{,}2 \cdot 1{,}3x = 1{,}56x$. После снижения розничной цены на 10 %, она стала $0{,}9 \cdot 1{,}56x = 1{,}404x$. Решим уравнение:

$$1{,}404x = 70{,}2 \Leftrightarrow x = 70{,}2 : 1{,}404 \Leftrightarrow x = 50 .$$

Таким образом, закупочная цена составляла 50 рублей, а покупатель заплатил на 20,2 рубля больше.

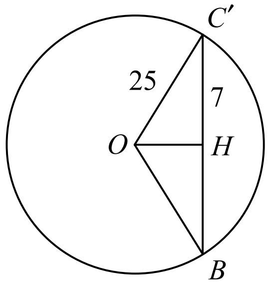
Ответ: 20,2.

B10. Концы отрезка BC лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 25, длина отрезка BC равна $14\sqrt{2}$, а угол между прямой BC и плоскостью основания цилиндра равен $45°$. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки B и C.



Решение. Пусть прямоугольник $BC'CB'$ — сечение данного цилиндра плоскостью, проходящей через отрезок BC и параллельной его оси OO' (см. рисунок). Расстояние от оси цилиндра до плоскости BCC' есть длина перпендикуляра OH, опущенного из точки O — центра нижнего основания цилиндра — на прямую BC'. Треугольник $OC'B$ равнобедренный, так как две его стороны — радиусы окружности, откуда:

$$C'H = \frac{1}{2} \cdot C'B = \frac{1}{2} \cdot \frac{CB}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 7 .$$

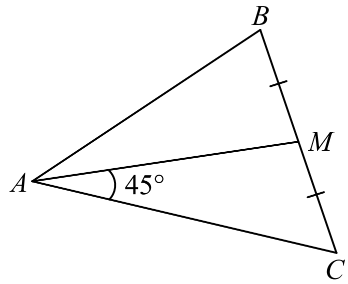


По теореме Пифагора из треугольника OHC' находим:

$$OH = \sqrt{OC'^2 - C'H^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{576} = 24 .$$

Ответ: 24.

B11. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 10$, $\widehat{MAC} = 45°$.



Решение. Применяя теорему косинусов к треугольнику ACM, последовательно получаем

$$MC^2 = AM^2 + AC^2 - 2AM \cdot AC \cdot \cos(\widehat{MAC}) ,$$

$$25 = AM^2 + 18 - 2AM \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow AM^2 - 6AM - 7 = 0 ,$$

откуда, учитывая, что $AM > 0$, находим $AM = 7$.

Найдем площадь треугольника AMC:

$$S_{\vartriangle AMC} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot MC \cdot \sin(\widehat{MAC}) = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{21}{2} .$$

Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, следовательно:

$$S_{\vartriangle ABC} = 2S_{\vartriangle AMC} = 2 \cdot 10{,}5 = 21 .$$

Ответ: 21.

C1. Решите уравнение $|\sin x| = \sin x \cdot \cos x$.

Решение. Рассмотрим два случая: $\sin x \geq 0$ и $\sin x < 0$.

1 случай:

$$\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin x(1 - \cos x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \ x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2 случай:

$$\begin{cases} \sin x < 0, \\ -\sin x = \sin x \cdot \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x = -1. \end{cases}$$

Полученная система не имеет решений.

Таким образом, решения уравнения задаются серией $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С1
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) преобразование уравнения в совокупность систем уравнений, равносильную данному уравнению; 2) решение полученных систем уравнений. Все тождественные преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. При решении допущена одна описка или негрубая ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения (например, вычислительная ошибка). В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

C2. Найдите нули функции $y = \ln^2(x^2 - 3x - 9) + \sqrt{x^3 - 8x - 8}$.

Решение. Сумма двух неотрицательных слагаемых обращается в нуль, только если они одновременно обращаются в нуль. Решим систему:

$$\ln^2(x^2 - 3x - 9) + \sqrt{x^3 - 8x - 8} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln^2(x^2 - 3x - 9) = 0, \\ \sqrt{x^3 - 8x - 8} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x^2 - 3x - 9) = 0, \\ x^3 - 8x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 9 = 1, \\ x^3 - 8x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 10 = 0, \\ x^3 - 8x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 5, \end{array} \right. \\ x^3 - 8x - 8 = 0. \end{cases}$$

Число -2 является корнем уравнения $x^3 - 8x - 8 = 0$, а число 5 — нет. Отсюда -2 есть единственное решение системы уравнений, а вместе с тем, и нуль исходной функции.

Ответ: -2.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С2
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) преобразование уравнения в равносильную ему систему уравнений; 2) решение полученной системы. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущена вычислительная ошибка и/или описка, не влияющие ход решения, в результате которых может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

Часть 3

С3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{-y+10x+11}{-2y-5x} = -5y-15x+22, \\ 25^{-2y-5x} + 25 = 26 \cdot 5^{-2y} \cdot 5^{-5x}. \end{cases}$

Решение. Преобразуем второе уравнение системы:

$$25^{-2y-5x} + 25 = 26 \cdot 5^{-2y} \cdot 5^{-5x} \Leftrightarrow 25^{-2y-5x} - 26 \cdot 5^{-2y-5x} + 25 = 0 .$$

Пусть $5^{-2y-5x} = t$. Решим уравнение

$$t^2 - 26t + 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 25. \end{array}\right.$$

Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} 5^{-2y-5x} = 1, \\ 5^{-2y-5x} = 25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2y-5x = 0, \\ -2y-5x = 2. \end{array}\right.$$

Далее имеем:

1. Если $-2y-5x=0$, то левая часть исходной системы не имеет смысла.
2. Если $-2y-5x=2$, то последовательно получаем:

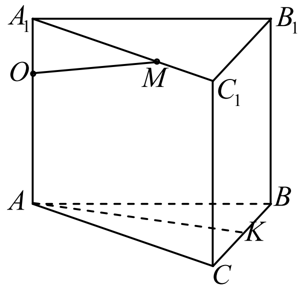
$$\begin{cases} \dfrac{-y+10x+11}{-2y-5x} = -5y-15x+22, \\ -2y-5x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-y+10(-2y-2)+11}{2} = -5y-3(-2y-2)+22, \\ 5x = -2y-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7y = 49, \\ 5x = -2y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{12}{5}, \\ y = -7. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{12}{5}; -7\right)\right\}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) второе уравнение системы заменено равносильной совокупностью уравнений; 2) решена составленная совокупность уравнений; 3) решена данная система уравнений. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Получен ответ. Допустима описка и/или вычислительная ошибка, в результате которых может быть получен неверный ответ.
2	Верно выполнены шаг 1) и 2), а шаг 3) выполнен неверно. Ответ неверен.
1	Верно выполнен один шаг 1) и 2), а шаг 3) отсутствует. Допустимо отсутствие ответа.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 — 4 балла.

С4. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, где AA_1, BB_1 и CC_1 — боковые ребра. Сфера, центр которой лежит на ребре AA_1, пересекает ребро A_1C_1 в точке M и касается плоскости основания ABC и боковой грани BB_1C_1C. Известно, что $AB = 12$, $\frac{A_1M}{MC_1} = \frac{3}{1}$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



Решение. Пусть точка O — центр данной сферы (см. рисунок). Тогда точка O удалена от точки M и от плоскостей ABC и BCC_1 на расстояние R, равное радиусу этой сферы. Поскольку $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, отрезок OA перпендикулярен основанию и, следовательно, является радиусом сферы. Расстояние от точки O до плоскости BCC_1 равно расстоянию от прямой AA_1 до параллельной ей плоскости BCC_1, т. е. высоте AK правильного треугольника ABC.

Найдем эту высоту:

$$AK = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3},$$

откуда $OA = OM = 6\sqrt{3}$.

Поскольку $\frac{A_1M}{MC_1} = \frac{3}{1}$, имеем: $A_1M = \frac{3}{4}A_1C_1 = 9$. Из прямоугольного треугольника A_1OM:

$$OA_1 = \sqrt{OM^2 - A_1M^2} = \sqrt{36\cdot 3 - 81} = 3\sqrt{3},$$

тогда

$$AA_1 = OA + OA_1 = 9\sqrt{3}.$$

Окончательно для площади S полной поверхности призмы получаем:

$$S = P_{\Delta ABC}\cdot AA_1 = 36\cdot 9\sqrt{3} = 324\sqrt{3}.$$

Ответ: $324\sqrt{3}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) определено положение центра данной сферы; 2) доказано, что радиус сферы равен высоте основания призмы; 3) найдена площадь боковой поверхности призмы. Верно приведены ссылки на используемые при доказательстве положения теории: а) определение правильной призмы; б) расстояние от прямой до параллельной ей плоскости; в) свойства правильного треугольника. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведены все шаги решения 1) — 3). Приведены ссылки на используемые при доказательстве положения теории а) – в). Допустимы отсутствие обоснований ключевых моментов или неточности в обоснованиях. [1)] Допустимы одна описка и/или вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.

[1)] Неточностью в обоснованиях является замена свойства на определение, свойства на признак или наоборот, а также неверные названия теорем или формул.

2	Приведены все шаги решения 1) — 3). Ссылки на используемые при доказательстве положения теории а) — в) либо отсутствуют, либо приведены не все, но сами эти положения теории использованы при решении. Допустимы описки и/или вычислительные ошибки, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этих ошибок или описок может быть получен неверный ответ.
1	Ход решения правильный, но решение не завершено: имеются шаги 1) и 2), найдены некоторые числовые характеристики призмы. Приведенные в решении обоснования и вычисления не содержат грубых ошибок
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 — 4 балла.

С5. Найдите все значения параметра *р*, при которых уравнение $(2p+3)x^2+(p+3)x+1=0$ имеет хотя бы один корень, и число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения $\dfrac{2x+1}{21-p}=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}+3}$.

Решение. Выясним сначала, сколько корней в зависимости от p имеет второе уравнение. Положим $t=\sqrt{x-3}$, тогда $x=t^2+3$. Таким образом, каждому $x\geq 3$ поставлено в соответствие единственное $t\geq 0$ и, наоборот, каждому $t\geq 0$ — единственное $x\geq 3$.

Далее, при $p\neq 21$ имеем:

$$\frac{2t^2+7}{21-p}=\frac{1}{t+3}\Leftrightarrow 2t^3+7t+6t^2+21=21-p\Leftrightarrow 2t^3+6t^2+7t=-p.$$

Рассмотрим функцию $f(t)=2t^3+6t^2+7t$. Так как $f'(t)=6t^2+12t+7>0$ при $t\geq 0$ и $f(0)=0$, функция $f(t)$ возрастает на промежутке $[0;+\infty)$. Следовательно, уравнение $2t^3+6t^2+7t=-p$ не имеет решений при $p>0$ и имеет единственное решение при всех $p\leq 0$.

Осталось выяснить, при каких значениях $p\leq 0$ первое уравнение имеет единственное решение. Это возможно в двух случаях: а) данное уравнение линейное и имеет один корень; б) данное уравнение квадратное, имеющее ровно один корень.

В случае а) $p=-1{,}5$, тогда уравнение принимает вид $1{,}5x+1=0$ и имеет единственное решение.

В случае б) $p\neq -1{,}5$, $p\leq 0$. Имеем:

$$D=0\Leftrightarrow (p+3)^2-4(2p+3)=0\Leftrightarrow p^2-2p-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p=-1,\\ p=3.\end{array}\right.$$

Так как $p=3$ не удовлетворяет условию $p\leq 0$, число различных корней первого уравнения равно числу различных корней второго уравнения только при $p=-1{,}5$ и $p=-1$.

Ответ: $-1{,}5$, -1.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) определено количество корней второго уравнения в зависимости от p; 2) рассмотрены оба случая, в которых первое уравнение может имеет единственное решение; 3) определено при каких значениях $p \le 0$ первое уравнение имеет единственное решение; Обоснованы все ключевые моменты решения: а) взаимнооднозначное соответствие между переменными x и t; б) количество решений уравнения $2t^3 + 6t^2 + 7t = -p$ в зависимости от p. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Обоснованы все ключевые моменты решения. Допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения. В результате этой описки (ошибки) может быть получен неверный ответ.
2	Верно выполнены шаги 1) и 2), а шаг 3) выполнен неверно, в том числе — неверно обоснован. Допустимы 1 — 2 вычислительные ошибки, в результате которых может быть получен неверный ответ.
1	Верно выполнен шаг 1) решения, а остальные — либо отсутствуют, либо выполнены неверно.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 — 4 балла.