Единый государственный экзамен по математике, 2003 год

Часть А

А1. Упростите выражение $\dfrac{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

1. 1 **2.** $\mathrm{tg}^2\,\alpha$ **3.** $\mathrm{ctg}^2\,\alpha$ **4.** $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, получаем:

$$\frac{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\mathrm{ctg}^2\,\alpha\,.$$

Правильный ответ: 3.

А2. Представьте выражение $a^{\frac{9}{4}}:a^{-\frac{3}{4}}$ в виде степени с основанием a.

1. $a^{-\frac{27}{16}}$ **2.** $a^{\frac{3}{2}}$ **3.** a^{-3} **4.** a^3

Решение. На основании свойств степени имеем:

$$a^{\frac{9}{4}}:a^{-\frac{3}{4}}=a^{\frac{9}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)}=a^{\frac{12}{4}}=a^3\,.$$

Правильный ответ: 4.

А3. Вычислите $\sqrt[3]{125\cdot 0{,}027}$.

1. $\dfrac{3}{2}$ **2.** 15 **3.** 0,015 **4.** 0,15

Решение. Применяя свойства корня последовательно получаем:

$$\sqrt[3]{125\cdot 0{,}027}=\sqrt[3]{5^3\cdot 3^3\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3}=5\cdot 3\cdot\frac{1}{10}=\frac{3}{2}\,.$$

Правильный ответ: 1.

А4. Найдите значение выражения $\log_{20}5+\log_{20}4+2$.

1. 1 **2.** 2 **3.** 3 **4.** 22

Решение. Используя формулу преобразования суммы логарифмов в логарифм произведения, получаем:

$$\log_{20}5+\log_{20}4+2=\log_{20}(5\cdot 4)+2=1+2=3\,.$$

Правильный ответ: 3.

А5. Найдите все решения уравнения $(\mathrm{tg}^2 x+1)\,\mathrm{tg}\,x=-\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

1. $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ k\in\mathbb{Z}$ **2.** $\pi k;\ k\in\mathbb{Z}$ **3.** $-\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\ k\in\mathbb{Z}$ **4.** $\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\ k\in\mathbb{Z}$

Решение. Применив формулу $1+\mathrm{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, получим:

$$(\mathrm{tg}^2 x+1)\,\mathrm{tg}\,x=-\frac{1}{\cos^2 x}\Leftrightarrow\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{\cos^2 x}=0\Leftrightarrow\frac{1}{\cos^2 x}(\mathrm{tg}\,x+1)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\mathrm{tg}\,x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

Правильный ответ: 3.

А6. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\lg(5+x)-\lg(1-x)=\lg 2$.

1. $(-2;\,0)$ **2.** $(0;\,8)$ **3.** $(-5;\,-2)$ **4.** $(8;\,10)$

Решение. Решим уравнение

$$\lg(5+x)-\lg(1-x)=\lg 2\Leftrightarrow\lg(5+x)=\lg 2+\lg(1-x)\Leftrightarrow\begin{cases}1-x>0,\\5+x=2(1-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<1,\\3x=-3\end{cases}\Leftrightarrow x=-1\,.$$

Таким образом, корень уравнение принадлежит промежутку $(-2;\,0)$.
Правильный ответ: 1.

А7. Решите неравенство $16\le 2^{x+3}$.

1. -3 **2.** $[7;\,+\infty)$ **3.** $(-\infty;\,-1]$ **4.** $[1;\,+\infty)$

Решение. По свойству показательной функции с основанием большим единицы

$$16\le 2^{x+3}\Leftrightarrow 2^4\le 2^{x+3}\underset{2>1}{\Leftrightarrow}4\le x+3\Leftrightarrow x\ge 1\,.$$

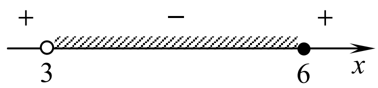
Правильный ответ: 4.

А8. Определите число целых решений неравенства $\dfrac{6-x}{3x-9}\ge 0$.

1. 1 **2.** 2 **3.** 3 **4.** 4

Решение. Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{6-x}{3x-9} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x-6}{x-3} \le 0$$



На промежутке $(3;\,6]$ есть три целых решения: 4, 5, 6.

Правильный ответ: 3.

A9. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $\sqrt{x-5} = 7-x$.

1. $[0;\,5{,}3]$ **2.** $[5{,}5;\,6{,}3]$ **3.** $[7;\,10]$ **4.** $[11;\,12{,}5]$

Решение.

I способ. Используя теорему равносильности $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$, получим:

$$\sqrt{x-5} = 7-x \Leftrightarrow \begin{cases} 7-x \ge 0, \\ x-5 = (7-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 7, \\ x^2 - 15x + 54 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 7, \\ \left[\begin{array}{l} x = 6, \\ x = 9 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 6 .$$

II способ. Приведем уравнение к квадратному относительно $\sqrt{x-5}$:

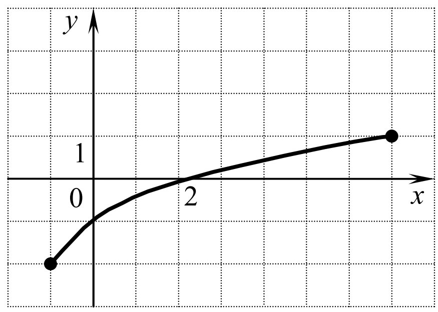
$$\sqrt{x-5} = 7-x \Leftrightarrow x-5+\sqrt{x-5}-2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-5}^{\,2} + \sqrt{x-5} - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-5} = -2 \text{ -- решений нет}, \\ \sqrt{x-5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x-5 = 1 \Leftrightarrow x = 6$$

Таким образом, корень уравнения принадлежит промежутку $[5{,}5;\,6{,}3]$.

Правильный ответ: 2.

A10. Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.

1. $[-1;\,2)$
2. $[-2;\,1]$
3. $(-1;\,6)$
4. $[-1;\,7]$



Решение. Область определения функции есть множество значений ее аргумента *x*. В нашем случае, это отрезок $[-1;\,7]$.

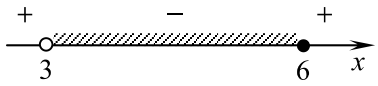
Правильный ответ: 4.

A11. Найдите область определения функции $y = \log_{\frac{1}{5}} \frac{6-x}{6+2x}$.

1. $(-3;\,6)$ **2.** $(-6;\,3)$ **3.** $(-\infty;\,-3) \cup (6;\,+\infty)$ **4.** $(0;\,6)$

Решение. Область определения функции задается неравенством $\frac{6-x}{6+2x} > 0$. Решим его методом интервалов:

$$\frac{6-x}{6+2x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-6}{x+3} < 0$$



Правильный ответ: 1.

А12. Найдите множество значений функции $y = \sin x - 3$.

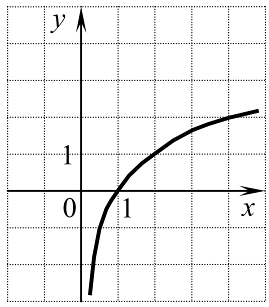
1. $[-4; -2]$ **2.** $[-10; 4]$ **3.** $[-4; 4]$ **4.** $[-10; 10]$

Решение. В силу ограниченности функции синус и свойств неравенств:

$$-1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow -4 \le \sin x - 3 \le -2 .$$

Правильный ответ: 1.

А13. График какой из перечисленных функций изображен на рисунке?



1. $y = 2^x$
2. $y = (0,5)^x$
3. $y = \log_2 x$
4. $y = \log_{0,5} x$

Решение. На рисунке изображен график функции $y = \log_2 x$.

Правильный ответ: 3.

А14. Найдите производную функции $y = \cos x + x^4$.

1. $y' = -\sin x + 4x^3$ **2.** $y' = \sin x + 4x^3$ **3.** $y' = \sin x + x^3$ **4.** $y' = -\sin x + x^3$

Решение. Используя формулы $(x^n)' = nx^{n-1}$ и $(\cos x)' = -\sin x$, получим:

$$y' = -\sin x + 4x^3 .$$

Правильный ответ: 1.

А15. Найдите первообразную функции $f(x) = e^x + 4x^3$, если известно, что $F(0) = -1$.

1. $F(x) = e^x + 3x^4 - 2$ **2.** $F(x) = e^x + x^4 - 2$
3. $F(x) = e^x + 12x^2 - 2$ **4.** $F(x) = -e^x + 12x^2$

Решение. Найдем множество первообразных $F(x)$:

$$F(x) = e^x + \frac{1}{4} \cdot 4x^4 + C = e^x + x^4 + C .$$

Найдем C:

$$F(0) = -1 \Leftrightarrow e^0 + 0^4 + C = -1 \Leftrightarrow 1 + C = -1 \Leftrightarrow C = -2 .$$

Таким образом,

$$F(x) = e^x + x^4 - 2.$$

Правильный ответ: 2.

А16. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 5x^2 - 3x + 2$ в его точке с абсциссой $x_0 = 2$.

1. 16 **2.** 17 **3.** 0,3 **4.** 0

Решение. Угловой коэффициент касательной к графику функции в некоторой точке равен значению производной функции в этой точке:

$$y'(x) = 10x - 3;$$
$$y'(2) = 10 \cdot 2 - 3 = 17.$$

Правильный ответ: 2.

Часть В

В1. Пусть $(x_0;\, y_0)$ — решение системы $\begin{cases} y+3=\sqrt{4x^2+20x+25}, \\ 3x-y+7=0. \end{cases}$ Найдите произведение $x_0 \cdot y_0$.

Решение. Решим систему

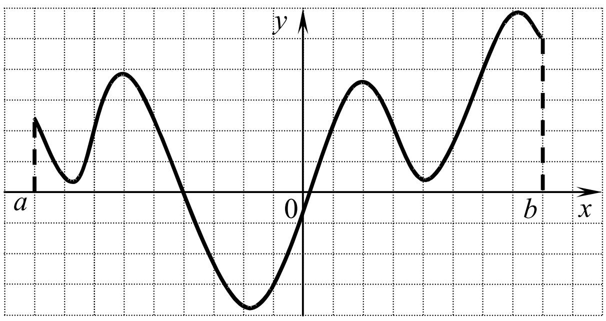
$$\begin{cases} y+3=\sqrt{4x^2+20x+25}, \\ 3x-y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(2x+5)^2}=3x+7+3, \\ y=3x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x+5|=3x+10, \\ y=3x+7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{10}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} 2x+5=-(3x+10), \\ 2x+5=3x+10, \end{array}\right. \\ y=3x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{10}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=-5, \end{array}\right. \\ y=3x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3, \\ y=-2. \end{cases}$$

Таким образом, произведением решений системы будет являться число 6.

Ответ: 6.

В2. На рисунке изображен график производной функции $y=f'(x)$, заданной на отрезке $[a;\, b]$. Исследуйте функцию $y=f(x)$ на монотонность и в ответе укажите число промежутков возрастания.



Решение. Данная функция возрастает на тех промежутках, на которых производная этой функции неотрицательна. В нашем случае таких промежутков 2.

Ответ: 2.

В3. Найдите значение выражения $(\log_{\sqrt[5]{5}} \sqrt{5} + \log_3 48 - \log_3 16)\cdot 15^{\log_{15} 4}$.

Решение.

$$(\log_{\sqrt[5]{5}} \sqrt{5} + \log_3 48 - \log_3 16)\cdot 15^{\log_{15} 4} = \left(\log_{5^{\frac{1}{5}}} 5^{\frac{1}{2}} + \log_3 \frac{48}{16}\right)\cdot 4 =$$

$$= \left(\frac{5}{2}\log_5 5 + \log_3 3\right)\cdot 4 = \left(\frac{5}{2}+1\right)\cdot 4 = 14.$$

Ответ: 14.

В4. Найдите наибольшее целое значение функции $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{25\cos^2 x+10\cos x+14}$.

Решение. Наибольшее значение функции y достигается при наибольшем значении подкоренного выражения $g(x)=25\cos^2 x+10\cos x+14$, т.е. при наибольшем значении квадратного трехчлена $f(t)=25t^2+10t+14$ на отрезке $[-1;\, 1]$.

$$f(t)=25t^2+10t+14=(5t+1)^2+13\,.$$

$$\max_{[-1;\,1]} f(t)=f(1)=6^2+13=49\,.$$

Тогда

$$\max_{\mathbb{R}} y(x)=1{,}5\sqrt{49}=10{,}5\,.$$

Ответ: 10,5.

В5. Укажите число корней уравнения $\operatorname{tg}2x\cdot\sin 4x+\cos 4x-\cos 8x=0$ на промежутке $[0;\,2\pi]$.

Решение. Упростим выражение $\operatorname{tg}2x\cdot\sin 4x+\cos 4x-\cos 8x$:

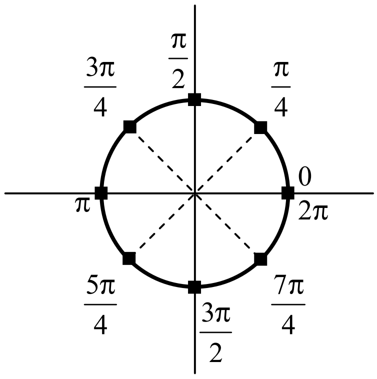
$$\operatorname{tg}2x\cdot\sin 4x+\cos 4x-\cos 8x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot 2\sin 2x\cdot\cos 2x+\cos 4x-\cos 8x=$$

$$=2\sin^2 2x+\cos 4x-\cos 8x=2\sin^2 2x+1-2\sin^2 2x-\cos 8x=1-\cos 8x\,,\ \text{где}\ \cos 2x\neq 0\,.$$

Решим систему

$$\begin{cases}\cos 2x\neq 0,\\ 1-\cos 8x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x\neq 0,\\ \cos 8x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ 8x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z},\\ x=\dfrac{\pi k}{4},\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\,.$$



На промежутке $[0;\,2\pi]$ решениями являются 0, $\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3\pi}{2}$, 2π.

Ответ: 5.

В6. При каком значении a функция $y=\sqrt[5]{ax^2+15x-1}$ имеет максимум в точке $x_0=\dfrac{3}{2}$?

Решение. Функция $y(x)$ имеет максимум в той же точке, что и фнкция $g(x)=ax^2+15x-1$, которая имеет максимум в точке $x=-\dfrac{15}{2a}$ только при отрицательных значений старшего коэффициента a. Решим уравнение

$$-\frac{15}{2a}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow a=-5\,.$$

Ответ: -5.

В7. К 120 г раствора, содержащего 80% соли, добавили 480 г раствора, содержащего 20% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

Решение. В первом растворе находится $0{,}8\cdot 120=96$ граммов, а во втором $480\cdot 0{,}2=96$ граммов соли. Масса сухого вещества после сливания стала $96+96=192$ граммов, масса растворов $120+480=600$ граммов. Тогда процентное содержание η соли в полученном растворе есть

$$\eta=\frac{192}{600}\cdot 100\%=32\%.$$

Ответ: 32%.

B8. Десятый член арифметической прогрессии равен 19, а сумма первых пятидесяти членов равна 2500. Найдите сумму третьего, двенадцатого и двадцатого членов этой прогрессии.

Решение. Поскольку $a_n=a_1+(n-1)d$ и $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$, имеем систему

$$\begin{cases} a_1+(10-1)d=19, \\ \frac{2a_1+d(50-1)}{2}\cdot 50=2500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+9d=19, \\ 2a_1+49d=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=19-9d, \\ 31d=62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=1, \\ d=2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$a_3=1+(3-1)\cdot 2=5,$$
$$a_{12}=1+(12-1)\cdot 2=23,$$
$$a_{20}=1+(20-1)\cdot 2=39.$$

Искомая сумма равна

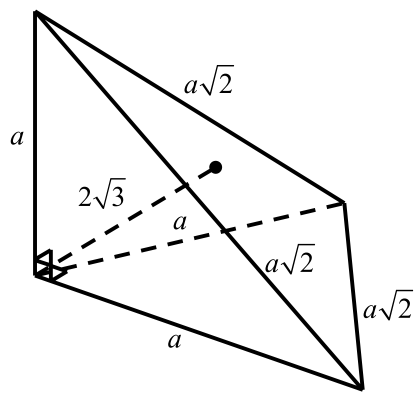
$$5+23+39=67.$$

Ответ: 67.

B9. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна $2\sqrt{3}$, а все плоские углы при вершине прямые.

Решение.

1. Пусть боковые ребра пирамиды имеют длину *a*. Тогда длина стороны ее основания равна $a\sqrt{2}$. Если за основание принять одну из боковых граней пирамиды, то объем пирамиды равен $V=\frac{1}{6}a^3$ (см. рисунок).



2. С другой стороны

$$V=\frac{1}{3}H\cdot S_{\text{осн.}}=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}=a^2.$$

3. Решая уравнение $\frac{1}{6}a^3=a^2$, находим $a=6$, откуда $V=36$.

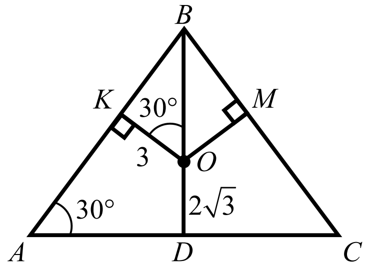
Ответ: $V=36$.

B10. Найдите основание равнобедренного треугольника, если угол при основании равен 30°, а взятая внутри треугольника точка находится на одинаковом расстоянии, равном 3, от боковых сторон и на расстоянии $2\sqrt{3}$ от основания.

Решение.

1. Введем обозначения, как показано на рисунке. Поскольку точка O равноудалена от боковых сторон, она принадлежит BD — биссектрисе, а, следовательно, медиане и высоте данного треугольника.

2. Треугольники ABD и OKB — подобны ($\angle BKO = \angle BDA = 90°$ и $\angle ABD$ — общий), следовательно, $\angle KOB = \angle BAD = 30°$.



Рассмотрим треугольник KBO:

$$BO = KO : \cos(\widehat{BOK}) = 2\sqrt{3},$$

следовательно,

$$BD = BO + OD = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

3. Из прямоугольного треугольника ABD получаем

$$AD = BD \cdot \operatorname{ctg}(\widehat{BAD}) = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12 \text{, и поскольку } AD = DC,\ AC = 2AD = 24.$$

Ответ: 24.

Часть С

С1. Решите уравнение $\sqrt{13 + \dfrac{4}{\log_x 3}} = 2\log_3(3\sqrt{x})$.

Решение.

$$\sqrt{13 + \frac{4}{\log_x 3}} = 2\log_3(3\sqrt{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \ne 1, \\ \sqrt{13 + 4\log_3 x} = 2\log_3 3 + 2\log_3 \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \ne 1, \\ \sqrt{13 + 4\log_3 x} = 2 + \log_3 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \ne 1, \\ 2 + \log_3 x \ge 0, \\ 13 + 4\log_3 x = (2 + \log_3 x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \ne 1, \\ \log_3 x \ge -2, \\ 13 + 4\log_3 x = 4 + 4\log_3 x + \log_3^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \ne 1, \\ \log_3 x \ge -2, \\ \log_3^2 x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \ne 1, \\ \log_3 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 27.$$

Ответ: $\{27\}$.

С2. Найдите все значения p, при которых уравнение $6\sin^3 x = p - 5\cos 2x$ не имеет корней.

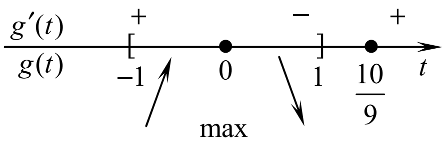
Решение.

$$6\sin^3 x = p - 5\cos 2x \Leftrightarrow p = 6\sin^3 x + 5\cos 2x \Leftrightarrow p = 6\sin^3 x + 5(1 - 2\sin^2 x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = 6\sin^3 x - 10\sin^2 x + 5.$$

Уравнение не имеет решений при всех p, не принадлежащих множеству значений функции $y(x)=6\sin^3 x-10\sin^2 x+5$, совпадающему со множеством значений функции $g(t)=6t^3-10t^2+5$ на отрезке $[-1;1]$. Найдем это множество:

Имеем: $g'(t)=18t^2-20t=2t(9t-10)$. (см.рис)



Тогда

а) $\max\limits_{[-1;\,1]} g(t)=g_{\max}=g(0)=5$;

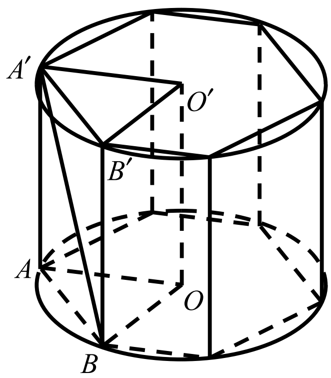
б) $g(-1)=-11$, $g(1)=1$ и, так как $g(-1)<g(1)$, имеем $\min\limits_{[-1;\,1]} g(t)=g(-1)=-11$. Так как функция $g(t)=6t^3-10t^2+5$ непрерывна на отрезке $[-1;1]$, ее множество значений – отрезок $[-11;5]$.

Таким образом, уравнение не имеет решений для $p\in(-\infty;-11)\cup(5;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-11)\cup(5;+\infty)$.

С3. Около правильной шестиугольной призмы описан цилиндр. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $16\pi\sqrt{3}$. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $2\sqrt{3}$. Найдите объем призмы.

Решение. Введем обозначения, как показано на рисунке.



1. Площадь боковой поверхности цилиндра равна:

$$S_{\text{бок.}}=2\pi RH,$$

где R — радиус основания цилиндра, H — его высота.

Тогда

$$16\pi\sqrt{3}=2\pi RH \Leftrightarrow RH=8\sqrt{3}.$$

2. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между одной из прямых и параллельной ей плоскостью, содержащей вторую прямую. Тогда расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой стороны призмы есть расстояние от прямой OO' до плоскости $AA'B'B$, которое равно высоте треугольника AOB, проведенной из точки O.

3. Так как треугольник AOB равносторонний, его высота есть $OB\cdot 0{,}5\sqrt{3}=0{,}5R\sqrt{3}$, откуда

$$0{,}5R\sqrt{3}=2\sqrt{3} \Leftrightarrow R=4.$$

4. Объем призмы равен:

$$V=S\cdot H=6\cdot\frac{R^2\sqrt{3}}{4}\cdot H=\frac{3}{2}\sqrt{3}\cdot R\cdot RH=\frac{3}{2}\sqrt{3}\cdot 4\cdot 8\sqrt{3}=144.$$

Ответ: $V=144$.

С4. Найдите все значения параметра a, при которых область определения функции $y=((\sqrt{a})^{2x+1}+a^4\sqrt{x}-x^{0,5+x\log_x a}-(\sqrt{a})^9)^{0,5}$ содержит два или три целых числа.

Решение. По смыслу задачи: $a > 0$, $0 < x \neq 1$.

Поскольку степень с дробным положительным показателем определена только для неотрицательного основания, область определения данной функции задается неравенством $(\sqrt{a})^{2x+1} + a^4\sqrt{x} - x^{0,5+x\log_x a} - (\sqrt{a})^9 \geq 0$. Решим это неравенство:

$$(\sqrt{a})^{2x+1} + a^4\sqrt{x} - x^{0,5+x\log_x a} - (\sqrt{a})^9 \geq 0 \Leftrightarrow a^{x+\frac{1}{2}} + a^4 \cdot x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \cdot a^x - a^{\frac{9}{2}} \geq 0 \Leftrightarrow$$

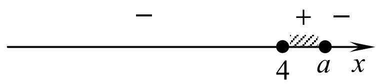
$$\Leftrightarrow a^x(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) + a^4(x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}) \geq 0 \Leftrightarrow (a^x - a^4)(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) \geq 0.$$

При $a = 1$ решениями неравенства являются все допустимые значения *x*, и область определения данной функции содержит бесконечное множество целых чисел.

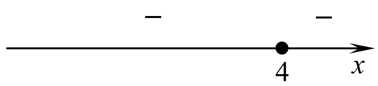
Решим последнее неравенство при $a > 0, a \neq 1$ методом интервалов:.

Имеем:

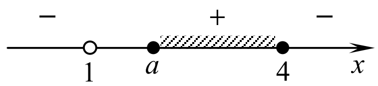
1. При $a > 4$: ООФ – отрезок $[4; a]$.



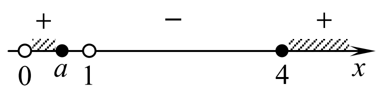
2. При $a = 4$: ООФ – множество $\{4\}$.



3. При $1 < a < 4$: ООФ – отрезок $[a; 4]$.



4. При $0 < a < 1$: ООФ – множество $(0; a] \cup [4; +\infty)$.



В первом случае ООФ содержит 2 или 3 целых числа, если $5 \leq a < 7$, во втором случае – ни при каких *a*, в третьем – при $1 < a \leq 3$, в четвертом – ни при каких *a*.

Ответ: $a \in (1; 3] \cup [5; 7)$.