Единый государственный экзамен по математике, 2002 год

Часть А

А1. Найдите значение выражения $\sqrt[6]{3^7 \cdot 4^5} \cdot \sqrt[6]{3^5 \cdot 4}$.

1. 24 **2.** 6 **3.** 36 **4.** $4\sqrt{3}$

Решение. Пользуясь свойствами арифметического корня находим:

$$\sqrt[6]{3^7 \cdot 4^5} \cdot \sqrt[6]{3^5 \cdot 4} = \sqrt[6]{3^7 \cdot 4^5 \cdot 3^5 \cdot 4} = \sqrt[6]{3^{12} \cdot 4^6} = \sqrt[6]{(3^2 \cdot 4)^6} = 3^2 \cdot 4 = 36 .$$

Правильный ответ: 3.

А2. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+4} + \dfrac{4\sqrt{y}}{y-16}$, при $y = 18$.

1. $9(4+3\sqrt{2})$ **2.** $-\dfrac{1}{9}$ **3.** 9 **4.** $4+3\sqrt{2}$

Решение. Заметим, что $(\sqrt{y}-4)(\sqrt{y}+4) = y-16$. Тогда

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+4} + \frac{4\sqrt{y}}{y-16} = \sqrt{y}\left(\frac{1}{\sqrt{y}+4} + \frac{4}{(\sqrt{y}+4)(\sqrt{y}-4)}\right) = \sqrt{y} \cdot \frac{\sqrt{y}-4+4}{(\sqrt{y}+4)(\sqrt{y}-4)} = \frac{y}{y-16} .$$

При $y = 18$ значение выражения равно $\dfrac{18}{2} = 9$.

Правильный ответ: 3.

А3. Укажите значение выражения $2\log_2 3 + \log_2 \dfrac{1}{3}$.

1. -2 **2.** $2\log_2 3$ **3.** 0 **4.** $\log_2 3$

Решение. Используя формулы логарифма степени и логарифма произведения, находим:

$$2\log_2 3 + \log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3^2 + \log_2 \frac{1}{3} = \log_2\left(3^2 \cdot \frac{1}{3}\right) = \log_2 3 .$$

Правильный ответ: 4.

А4. Упростите выражение $\frac{1}{1+\sin\alpha}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

1. 1 **2.** $\frac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$ **3.** $\frac{1}{1+\sin\alpha}$ **4.** $1+\sin\alpha$

Решение. Применяя основное тригонометрическое тождество и формулу синуса двойного аргумента, получаем:

$$\frac{1}{1+\sin\alpha}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{1+\sin\alpha}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{1+\sin\alpha}\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=1.$$

Правильный ответ: 1.

А5. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\left(\frac{1}{27}\right)^{0,5x-1}=9$.

1. $[-2;-1)$ **2.** $[3;5)$ **3.** $[1;3)$ **4.** $[-1;1)$

Решение. Перейдем к степени с основанием $\frac{1}{3}$:

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{0,5x-1}=9\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{3(0,5x-1)}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\Leftrightarrow 3(0,5x-1)=-2\ \Leftrightarrow\ \frac{3}{2}x-3=-2\Leftrightarrow\frac{3}{2}x=1\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}.$$

Корень уравнения принадлежит промежутку $[-1;1)$.

Правильный ответ: 4.

А6. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{9}}(6-0,3x)>-1$.

1. $[-10;+\infty)$ **2.** $(-\infty;-10)$ **3.** $(-10;20)$ **4.** $(-0,1;20)$

Решение. Пользуясь свойством логарифмической функции, основание которой меньше единицы, получаем:

$$\log_{\frac{1}{9}}\left(6-\frac{3}{10}x\right)>-1\Leftrightarrow 0<6-\frac{3}{10}x<\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}\Leftrightarrow -6<-\frac{3}{10}x<9-6\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow-\frac{10}{3}\cdot 6<-x<\frac{10}{3}\cdot 3\Leftrightarrow -20<-x<10\Leftrightarrow 20>x>-10\Leftrightarrow -10<x<20.$$

Правильный ответ: 3.

А7. Найдите область определения функции $y=\sqrt[4]{1-7^{x^2}\cdot 49^x}$.

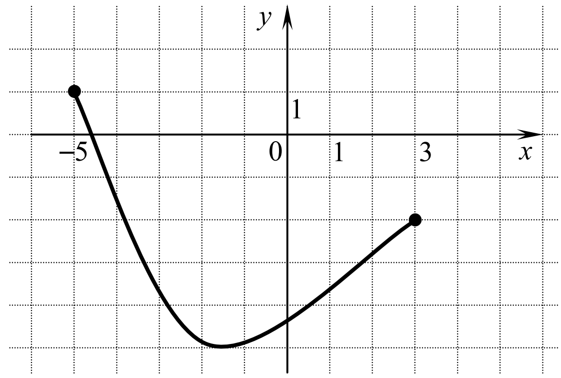
1. $[-2;2]$ **2.** $[0;2]$ **3.** $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$ **4.** $[-2;0]$

Решение. Область определения функции задается неравенством $1-7^{x^2}\cdot 49^x \geq 0$. Решим его:

$$1-7^{x^2}\cdot 49^x \geq 0 \Leftrightarrow 7^{x^2}\cdot 7^{2x} \leq 1 \Leftrightarrow 7^{x^2+2x} \leq 7^0 \underset{7>1}{\Leftrightarrow} x^2+2x \leq 0 \Leftrightarrow x(x+2) \leq 0 \quad \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0.$$

Правильный ответ: 4.

А8. Функция $y=f(x)$ задана графиком на отрезке $[-5;\,3]$. Укажите область ее значений.



1. $[-5;\,1]$
2. $[1;\,-2)\cup(-2;\,-5]$
3. $(-2;\,1]$
4. $[1;\,-2]$

Решение. Значение функции — ордината проекции точки ее графика на ось *Oy*. В нашем случае множество этих значений есть отрезок $[-5;\,1]$.

Правильный ответ: 1.

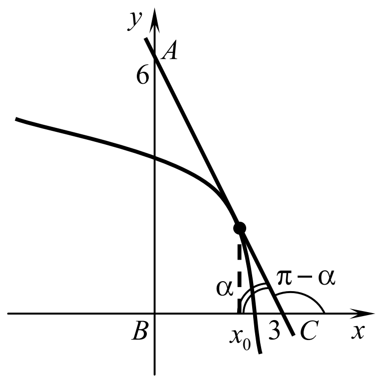
А9. Найдите произведение корней уравнения $\sin 2x = x$.

1. 0	**2.** $-\dfrac{\pi^2}{36}$	**3.** $-\dfrac{\pi^2}{16}$	**4.** корней нет

Решение. Ясно, что число 0 — решение данного уравнения, следовательно, сколько бы корней не имело данное уравнение, произведение всех корней равно нулю.

Правильный ответ: 1.

А10. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



1. -2
2. 2
3. 3
4. 6

Решение. Значение производной в точке касания равно тангенсу угла наклона касательной к графику в этой точке, причем угол отсчитывается от положительного направления оси абсцисс. Найдем тангенс угла *ACB* прямоугольного треугольника *ABC* (см. рис.): $\operatorname{tg}\angle ACB = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{6}{3} = 2$. Тогда тангенс угла наклона касательной есть $\operatorname{tg}(\pi - \angle ACB) = -\operatorname{tg}\angle ACB = -2$.

Правильный ответ: 1.

А11. Найдите значение производной функции $y = x^2 + \sin x$ в точке $x_0 = \pi$.

1. π^2-1	**2.** $2\pi+1$	**3.** 2π	**4.** $2\pi-1$

Решение. Используя формулы $(x^n)' = nx^{n-1}$ и $(\sin x)' = \cos x$, получим:

$$y' = 2x + \cos x;$$
$$y'(\pi) = 2 \cdot \pi + \cos\pi = 2\pi - 1.$$

Правильный ответ: 4.

А12. Укажите первообразную функции $f(x) = x + \cos x$.

1. $F(x) = 2 - \cos x$ **2.** $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - \sin x$ **3.** $F(x) = x^2 + \cos x$ **4.** $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \sin x$

Решение. Поскольку первообразной функции x^n является $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, а первообразной функции $\cos x$ является $\sin x$, получаем:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin x + C \text{ (в нашем случае } C = 0\text{)}.$$

Правильный ответ: 4.

А13. Решите уравнение $\sin^2 x - \cos^2 x = \dfrac{1}{2}$.

1. корней нет **2.** $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$ **3.** $\dfrac{\pi}{3} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$ **4.** $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

Решение. Используя формулу косинуса двойного аргумента, получаем:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ 2x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

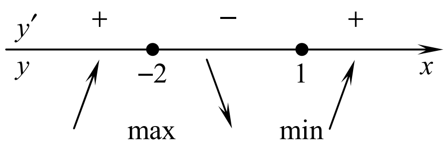
Правильный ответ: 4.

Часть В

В1. Найдите максимум функции $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x - 2\dfrac{1}{3}$.

Решение. Найдем производную:

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x - 2 = x^2 + x - 2;$$



Найдем нули производной:

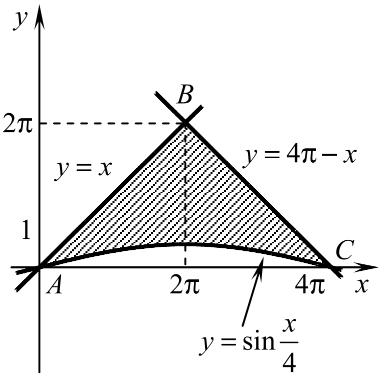
$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Знаки производной и промежутки монотонности функции показаны на рисунке. Функция имеет максимум в точке $x = -2$, следовательно,

$$y_{\max} = y(-2) = \frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} - 2(-2) - \frac{7}{3} = 6 - 5 = 1.$$

Ответ: 1.

В2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = -x + 4\pi$, $y = \sin\frac{x}{4}$.



Решение. Построим эскизы графиков (см. рисунок). Площадь заштрихованной фигуры равна разности площади треугольника ABC и площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin\frac{x}{4}$ и отрезком $[0;\, 4\pi]$ оси абсцисс. Координаты точки пересечения графиков $y = -x + 4\pi$ и $y = x$ находятся из условия $-x + 4\pi = x$, откуда $x = 2\pi$, $y = 2\pi$. Площадь треугольника ABC равна:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 2\pi = 4\pi^2.$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \sin\frac{x}{4}$ и отрезком $[0;\, 4\pi]$ оси абсцисс равна:

$$S = \int_0^{4\pi} \sin\frac{x}{4}\,dx = -4\cos\frac{x}{4}\Big|_0^{4\pi} = -4(\cos\pi - \cos 0) = 8.$$

Таким образом, искомая площадь равна:

$$S = 4\pi^2 - 8.$$

Ответ: $4\pi^2 - 8$.

В3. Сколько корней имеет уравнение $\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\sqrt{25 - x^2} = 0$?

Решение. Произведение равно нулю, если какой-то из множителей равен нулю, а остальные при этом имеют смысл. Для нашего случая имеем:

$$\text{либо а)} \begin{cases} 25 - x^2 \ge 0 \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = 0 \end{cases}, \text{ либо б)} \begin{cases} 25 - x^2 = 0 \\ \cos x \ne 0 \end{cases}.$$

а) $\begin{cases} 25-x^2 \ge 0 \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \le x \le 5 \\ \cos^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \le x \le 5 \\ x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\pi \\ x=0 \\ x=\pi \end{array} \right.$

б) $\begin{cases} 25-x^2 = 0 \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=5 \end{array} \right.$

Таким образом, данное уравнение имеет пять корней.

Ответ: 5.

B4. При каком наибольшем значении a функция $f(x)=\frac{2}{3}x^3-ax^2+7ax+5$ возрастает на всей числовой прямой?

Решение. Поскольку функция $f(x)=\frac{2}{3}x^3-ax^2+7ax+5$ дифференцируема на всей числовой прямой, она возрастает, если $f'(x)>0$ при любом значении x, за исключением, может быть, «отдельных» точек, в которых $f'(x)=0$.

$$f'(x)=2x^2-2ax+7a\ .$$

Чтобы $f'(x)\ge 0$ на всей числовой прямой, необходимо, чтобы дискриминант квадратного трехчлена $2x^2-2ax+7a$ был неположителен:

$$\frac{D}{4}\le 0 \Leftrightarrow a^2-14a\le 0 \Leftrightarrow a(a-14)\le 0 \Leftrightarrow 0\le a\le 14\,.$$

Ответ: 14.

B5. Пусть $(x_0;\,y_0)$ — решение системы $\begin{cases} y+2=\sqrt{x+4}, \\ y+|x-5|=1. \end{cases}$ Найдите отношение $\dfrac{x_0}{y_0}$.

Решение.
I способ.

$$\begin{cases} y+2=\sqrt{x+4} \\ y+|x-5|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2=\sqrt{x+4} \\ y+2=3-|x-5| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4}=3-|x-5| \\ y+|x-5|=1 \end{cases}.$$

Решим первое уравнение системы:

а) $\begin{cases} x\ge 5 \\ \sqrt{x+4}=8-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\le x\le 8 \\ x+4=64-16x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\le x\le 8 \\ x^2-17x+60=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5\,.$

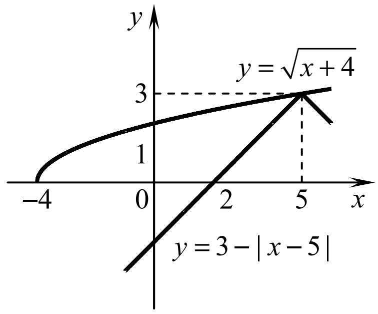
б) $\begin{cases} -4\le x<5 \\ \sqrt{x+4}=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\le x<5 \\ x+4=x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\le x<5 \\ x^2-5x=0 \end{cases}$ – система не имеет решений.

Подставляя найденное значение x во второе уравнение системы, получаем $y=1$. Таким образом, пара (5; 1) – единственное решение данной системы, откуда искомое отношение равно 5.

II способ.

$$\begin{cases} y+2=\sqrt{x+4}, \\ y+|x-5|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4}=3-|x-5|\ (*), \\ y=1-|x-5|. \end{cases}$$

Решим уравнение (*) с помощью графиков функций $y=\sqrt{x+4}$ и $y=3-|x-5|$. Проверка подтверждает, что «вершина» графика $y=3-|x-5|$ – точка (5; 3) – принадлежит графику функции $y=\sqrt{x+4}$, следовательно, графики имеют ровно одну общую точку – (5; 3). Отсюда следует, что $x=5$ – единственное решение уравнения (*).



Далее получаем:

$$\begin{cases} x=5, \\ y=1-|x-5| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ y=1. \end{cases}$$

Таким образом, искомое отношение равно 5.

Ответ: 5.

B6. Найдите значение выражения $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Решение. Поскольку $\arcsin(-x)=-\arcsin(x)$, получаем:

$$\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0.$$

Ответ: 0.

B7. Найдите наименьшее значение функции $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2-x^2)$.

Решение. Поскольку $\frac{1}{2}<1$, функции $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2-x^2)$ принимает свое наименьшее значение в той точке, в которой функция $f(x)=2-x^2$ принимает свое наибольшее значение, т.е. в точке $x=0$. Таким образом, наименьшее значение функции $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2-x^2)$ равно $g(0)=\log_{\frac{1}{2}}2=-1$.

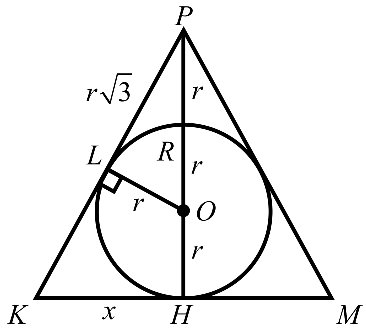
Ответ: -1.

B8. В равнобедренный треугольник *PMK* с основанием *MK* вписана окружность с радиусом $2\sqrt{3}$. Высота *PH* делится точкой пересечения с окружностью в отношении $1:2$, считая от вершины *P*. Найдите периметр треугольника *PMK*.

Решение.
I способ.

1 Поскольку PH делится точкой R пересечения с окружностью в отношении $1:2$, имеем:

$$PR = \frac{1}{2}RH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot r = r \text{; откуда } PO = PR + RO = 2r.$$



2. Проведем $OL \perp PK$, $OL = r$. Поскольку в прямоугольном треугольнике PLO катет OL равен половине гипотенузы PO, имеем $\widehat{LPO} = 30°$. Тогда $\widehat{KPM} = 60°$ и KPM – равносторонний треугольник. Тогда

$$KM = 2\sqrt{3}r = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 12 \text{, откуда } P_{\triangle KPM} = 3 \cdot 12 = 36.$$

II способ.

1 Поскольку PH делится точкой R пересечения с окружностью в отношении $1:2$, имеем:

$$PR = \frac{1}{2}RH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot r = r \text{; откуда } PO = PR + RO = 2r \text{ и } PO : OH = 2:1.$$

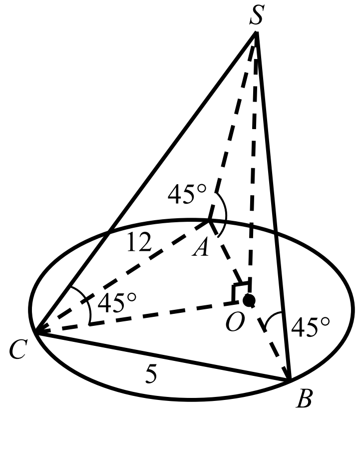
2. Так как PMK – равнобедренный треугольник, его высота PH является также и медианой, следовательно, точка O – точка пересечения медиан треугольника PMK. Но центр вписанной в треугольник окружности есть точка пересечения его биссектрис. Поскольку точка пересечения медиан треугольника PMK и точка пересечения его биссектрис совпадают, треугольник KPM – равносторонний треугольник, откуда получаем

$$KM = 2\sqrt{3}r = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 12. \ P_{\triangle KPM} = 3 \cdot 12 = 36.$$

Ответ: 36.

В9. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 13, 12 и 5. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $45°$. Найдите объем пирамиды.

Решение. Введем обозначения, как показано на рисунке.



1. Заметим, что в основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник ($5^2 + 12^2 = 13^2$), следовательно, его площадь S равна половине произведения катетов:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30.$$

2. Поскольку боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания – в середину O гипотенузы AB.
3. Медиана CO прямоугольного треугольника ABC равна радиусу описанной около него окружности – половине гипотенузы AB.
4. Треугольник SOC прямоугольный и равнобедренный ($\angle SCO = 45°$), откуда

$$|SO| = |CO| = |OB| = \frac{13}{2}, \ V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot |SO| = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot \frac{13}{2} = 65.$$

Ответ: 65.

Часть C

C1. Решите уравнение $32^{x+3}\cdot 3^{3x+1}\cdot 625^{x+2}=600^{x+7}$.

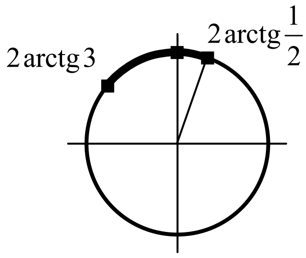
Решение.

$$32^{x+3}\cdot 3^{3x+1}\cdot 625^{x+2}=600^{x+7}\Leftrightarrow 2^{5(x+3)}\cdot 3^{3x+1}\cdot 5^{4(x+2)}=2^{3(x+7)}\cdot 3^{x+7}\cdot 5^{2(x+7)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x-6}\cdot 3^{2x-6}\cdot 5^{2x-6}=1\Leftrightarrow 30^{2x-6}=1\Leftrightarrow 2x-6=0\Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: $\{3\}$.

C2. Найдите множество значений функции $y=\sin 2x$, если $x\in\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{2};\operatorname{arctg}3\right]$.

Решение.



1. Пусть $2x=t$. Тогда множество значений функции $y=\sin 2x$ на отрезке $\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{2};\operatorname{arctg}3\right]$ совпадает с множеством значений функции $y=\sin t$ на отрезке $\left[2\operatorname{arctg}\frac{1}{2};2\operatorname{arctg}3\right]$.

Так как $y=\operatorname{arctg}x$ убывающая функция $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}<\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}3>\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, откуда $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}<\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}3>\frac{2\pi}{3}$.

2. Изобразим отрезок $\left[2\operatorname{arctg}\frac{1}{2};2\operatorname{arctg}3\right]$ на единичной окружности (см. рисунок).

Функция $y=\sin t$ возрастает на отрезке $\left[2\operatorname{arctg}\frac{1}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};2\operatorname{arctg}3\right]$, следовательно, свое наибольшее значение она принимает в точке $x=\frac{\pi}{2}$, а наименьшее – на одном из концов отрезка $\left[2\operatorname{arctg}\frac{1}{2};2\operatorname{arctg}3\right]$.

3. Вычислим эти значения:

а) наибольшее значение функции: $\sin\frac{\pi}{2}=1$;

б) поскольку $\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}$, имеем

$$\sin(2\operatorname{arctg}3)=\frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3)}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}3)}=\frac{2\cdot 3}{1+9}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15},$$

$$\sin(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2})=\frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{1}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}\frac{1}{2})}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}=\frac{10}{15}.$$

Таким образом, $\sin(2\operatorname{arctg}3)<\sin(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2})$, откуда 0,6 – наименьшее значение функции.

Поскольку функция $y = \sin t$ непрерывна на отрезке $\left[2\operatorname{arctg}\frac{1}{2};\, 2\operatorname{arctg}3\right]$, множество ее значений есть отрезок $\left[\sin(2\operatorname{arctg}3);\, \sin\frac{\pi}{2}\right]$, т.е. отрезок $[0,6;\, 1]$.

.

Ответ: $[0,6;\, 1]$.

С3. При каких значениях *a* сумма $\log_a(\cos^2 x + 1)$ и $\log_a(\cos^2 x + 5)$ равна 1 хотя бы при одном значении *x*?

Решение.

Требуется найти значения параметра *a* такие, что уравнение $\log_a(\cos^2 x + 1) + \log_a(\cos^2 x + 5) = 1$ имеет хотя бы одно решение. Поскольку $\cos^2 x + 1 > 0$ и $\cos^2 x + 1 > 0$, имеем

$$\log_a(\cos^2 x + 1) + \log_a(\cos^2 x + 5) = 1 \Leftrightarrow \log_a((\cos^2 x + 1)(\cos^2 x + 5)) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_a(\cos^4 x + 6\cos^2 x + 5) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, \\ \cos^4 x + 6\cos^2 x + 5 = a. \end{cases}$$

Уравнение $\cos^4 x + 6\cos^2 x + 5 = a$ имеет решения, если *a* принадлежит множеству значений функции $f(x) = \cos^4 x + 6\cos^2 x + 5$, совпадающему со множеством значений функции $g(t) = t^2 + 6t + 5$ на отрезке $[0;\, 1]$.

Поскольку абсцисса вершины $t_0 = -3$ параболы $g(t) = t^2 + 6t + 5$ меньше нуля, функция $g(t) = t^2 + 6t + 5$ возрастает на отрезке $[0;\, 1]$ и множество ее значений на этом отрезке есть отрезок $[g(0);\, g(1)]$, т.е. отрезок $[5;\, 12]$. Таким образом, искомыми значениями параметра являются все числа *a*, такие, что $5 \le a \le 12$.

Ответ: $[5;\, 12]$.