Сайт элементарной математики
Дмитрия Гущина
www.mathnet.spb.ru

Гущин Д. Д.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАНИЯ B3 И B6: ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Проверяемые элементы содержания и виды деятельности: владение понятиями треугольник, четырехугольник, многоугольник, центральный и вписанный угол, окружность, знание их свойств.

Ориентировочное время выполнения учащимися, изучающими математику на базовом уровне: 10—15 минут.

Типы заданий:

- Треугольник.
- Параллелограмм.
- Прямоугольник.
- Ромб.
- Трапеция.
- Центральные и вписанные углы.
- Хорда, касательная к окружности, секущая.
- Вписанная окружность.
- Описанная окружность.
- Площади многоугольников.
- Площадь круга и кругового сектора.
- Координаты и векторы.

ВНИМАНИЕ: ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

По задумке составителей, задания типа B3 должны были отличаться от заданий B6 тем, что первые должны были являться задачами на вычисление величин углов или длин отрезков, а вторые — задачами на вычисление площадей фигур. За некоторым исключением это так и есть.

Среди традиционных геометрических задач, привычных по школьным учебникам, в число заданий включено значительное количество вопросов на определение характеристик геометрических фигур, нарисованных на клетчатой бумаге с квадратными клетками. Как правило, это простые, хотя иногда и непривычные задачи.

Значительный процент задач связан с применением тригонометрии для решения геометрических задач. При подготовке к экзамену следует уделить особое внимание повторению соответствующих формул.

Треугольники

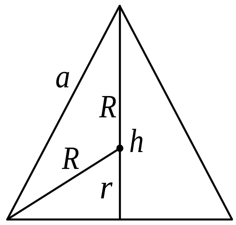
ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны равны. Равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона — *основанием* равнобедренного треугольника. Вершина угла равнобедренного треугольника, лежащая напротив основания, называется *вершиной* равнобедренного треугольника. Высота, медиана и биссектриса равнобедренного треугольника, проведенные к его основанию, совпадают. Углы при основании равнобедренного треугольника равны. Высоты (медианы, биссектрисы), проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника равны.

Треугольник, все три стороны которого равны, называется *правильным* (*равносторонним*) треугольником.

Пусть a, h, S, R, r — соответственно длина стороны, высота, площадь, радиус описанной и радиус вписанной окружности правильного треугольника.

Тогда имеют место следующие соотношения:



$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

$$R=\frac{a}{\sqrt{3}}, \qquad r=\frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

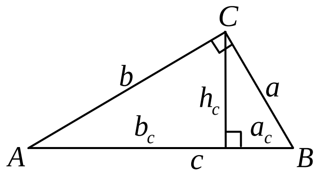
Если один из углов треугольника прямой, то треугольник называется *прямоугольным*. В прямоугольном треугольнике сторона, лежащая против прямого угла называется *гипотенузой*, а две другие стороны называются *катетами* этого треугольника.

Обозначим через c гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC, через a_c и b_c — проекции катетов a и b на гипотенузу AB, а через h_c — высоту, проведенную из вершины прямого угла C этого треугольника.

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$a^2+b^2=c^2,$$

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \cos A=\frac{b}{c}, \qquad \operatorname{tg} A=\frac{a}{b},\ \operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}.$$



Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника называется *средней линией* треугольника. Средняя линия треугольника параллельна одной из сторон треугольника и равна ее половине.

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется *медианой* треугольника. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, и точка пересечения делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины.

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется *биссектрисой* треугольника. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (центре вписанной окружности). Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника, на прямую, содержащую противоположную сторону, называется *высотой* треугольника. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (центре описанной окружности).

Правильным шестиугольником называется шестиугольник, у которого все стороны и углы равны. Сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной вокруг него окружности. Большая диагональ правильного шестиугольника является диметром описанной вокруг него окружности и равна двум его сторонам.

Параллелограмм

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Параллелограмм. *Параллелограммом* называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны. Справедливы следующие утверждения.

– Две противоположные стороны четырехугольника равны и параллельны тогда и только тогда, когда этот четырехугольник — параллелограмм.

– Противоположные стороны четырехугольника попарно равны тогда и только тогда, когда этот четырехугольник — параллелограмм.

– Противоположные углы четырехугольника попарно равны тогда и только тогда, когда этот четырехугольник — параллелограмм.

– Диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам тогда и только тогда, когда этот четырехугольник — параллелограмм.

Прямоугольник

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Прямоугольник. *Прямоугольником* называется параллелограмм, у которого все углы прямые. Так как прямоугольник, по определению, является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, прямоугольник обладает следующим характеристическим свойством.

Диагонали параллелограмма равны тогда и только тогда, когда этот параллелограмм — прямоугольник.

Ромб

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Ромб. Ромбом называется параллелограмм, все стороны которого равны. Так как ромб, по определению, является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, ромб обладает следующими характеристическими свойствами.

Диагонали параллелограмма делят его углы пополам тогда и только тогда, когда этот параллелограмм — ромб.

Диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда этот параллелограмм — ромб.

Трапеция

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Трапеция. *Трапецией* называется четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, а две другие стороны — *боковыми сторонами*. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции называется *средней линией* трапеции. Трапеция, боковые стороны которой равны, называется *равнобедренной* трапецией. Трапеция, один из углов которой прямой, равен называется *прямоугольной* трапецией. Трапеция обладает следующими свойствами.

Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.

Диагонали трапеции равны тогда и только тогда, когда эта трапеция равнобедренная.

Углы при каждом основании трапеции равны тогда и только тогда, когда эта трапеция равнобедренная.

Сумма противолежащих углов в равнобедренной трапеции равна $180°$.

В равнобедренной трапеции расстояние от вершины одного основания до проекции противоположной вершины на прямую, содержащую это основание, равно средней линии.

Центральные и вписанные углы

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Окружность и ее элементы. *Окружностью* называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на данном расстоянии от данной точки.

Любые две точки окружности делят ее на две части, каждая из которых называется дугой окружности, а данные точки называются концами этих дуг.

Если дуга AB окружности с центром O меньше или равна полуокружности, то за ее градусную (радианную) меру принимается градусная (радианная) мера центрального угла AOB, если дуга AB больше полуокружности, то ее градусную (радианную) меру считают равной $360° - AOB$ $(2\pi - AOB)$.

Хорда. Отрезок, концы которого лежат на окружности, называется ее *хордой*. Справедливы следующие утверждения.

– Равные хорды стягивают равные дуги.

– Углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, либо равны, либо в сумме дают $180°$.

– Хорда, равная диаметру, из всех точек окружности видна под углом $90°$.

– Радиус окружности, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.

– Угол между двумя хордами равен полусумме высекаемых ими дуг.

Касательная. Прямая, имеющая с окружностью ровно одну общую точку, называется касательной к окружности. Справедливы следующие утверждения.

– Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны.

– Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

– Угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, равен половине заключенной между ними дуги.

– Угол между двумя касательными к окружности равен полуразности высекаемых ими дуг.

Секущая. Прямая, имеющая с окружностью две общие точки, называется секущей. Справедливы следующие утверждения.

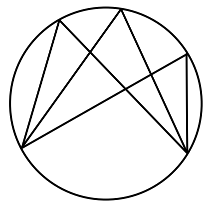
– Угол между касательной и секущей равен полуразности высекаемых ими дуг

– Угол между двумя секущими равен полуразности высекаемых ими дуг.

Круг. Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется *кругом*. Центр, радиус и диаметр окружности, ограничивающей круг, называются также центром, радиусом и диаметром круга. Любые два радиуса делят круг на две части, каждая из которых называется *круговым сектором* или просто *сектором*. Дуга, ограничивающая сектор, называется дугой сектора. Любая хорда делит круг на две части, каждая из которых называется *круговым сегментом* или просто *сегментом*.

Длина окружности и площадь круга. Пусть R — радиус окружности, C — ее длина, S — площадь круга. Имеют место следующие соотношения:

$$C = 2\pi R, \qquad S = \pi R^2.$$



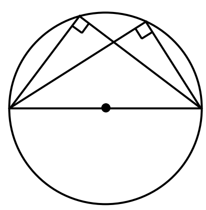
Вписанный угол. Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется *вписанным углом*. Справедливы следующие утверждения.

– Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

– Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

– Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (см. рис.).

– Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой (см. рис.).



– Отношение хорды к синусу вписанного угла, который на нее опирается, равно двум радиусам (теорема синусов).

Вписанная окружность

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Вписанная окружность. Окружность называется *вписанной* в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности. Многоугольник в этом случае называется описанным около окружности.

Центр окружности, вписанной в многоугольник, есть точка, равноудаленная от всех сторон этого многоугольника, — точка пересечения биссектрис углов этого многоугольника. В многоугольник можно вписать окружность и притом только одну, тогда и только тогда, когда биссектрисы его углов пересекаются в одной точке.

В любой треугольник можно вписать окружность.

В правильный многоугольник можно вписать окружность.

В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

Если окружность радиуса r вписана в многоугольник, площадь которого равна S, а полупериметр равен p, то имеет место соотношение $S = pr$.

Если окружность вписана в правильный треугольник, то ее радиус r выражается через его сторону a по формуле $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Если окружность радиуса r вписана в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c, то $r = \frac{a+b-c}{2}$.

Если окружность вписана в квадрат, то ее радиус равен половине стороны квадрата.

Описанная окружность

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Описанная окружность. Определение. Окружность называется *описанной* вокруг многоугольника, если все вершины многоугольника принадлежат этой окружности. Многоугольник в этом случае называется вписанным в окружность.

Центр окружности, описанной вокруг многоугольника, есть точка, равноудаленная от всех вершин этого многоугольника, — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого многоугольника. Около многоугольника можно описать окружность и притом только одну, тогда и только тогда, когда серединные перпендикуляры к сторонам этого многоугольника пересекаются в одной точке.

Около любого треугольника можно описать окружность. Радиус описанной окружности равен отношению половины стороны к синусу противолежащего угла: $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$.

Около правильного многоугольника можно описать окружность.

Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны

Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда эта трапеция равнобедренная.

Площади многоугольников

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Теоремы о площадях. Для вычисления площадей многоугольников применяют следующие теоремы.

– Площадь треугольника равна половине произведения стороны на высоту, проведенную к этой стороне или к ее продолжению.

– Площадь треугольника равна половине произведения сторон на синус угла между ними.

– Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

– Площадь прямоугольника равна произведению его сторон.

– Площадь параллелограмма равна произведению стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

– Площадь параллелограмма равна половине произведения сторон на синус угла между ними.

– Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

– Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

– Площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.

– Площади подобных многоугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.

– Площадь многоугольника, вершины которого лежат в узлах решетки, равна $B+\mathit{\Gamma}/2-1$, где B — количество узлов внутри многоугольника, а $\mathit{\Gamma}$ — количество узлов на границе многоугольника (формула Пика).

Площади круга и кругового сектора

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Соотношения между элементами окружности и круга. Пусть r — радиус окружности, d — ее диаметр, C — длина окружности, S — площадь круга, l_{n° — длина дуги в n градусов, l_α — длина дуги в α радиан, S_{n° — площадь сектора, ограниченного дугой в n градусов, S_α — площадь сектора, ограниченного дугой в α радиан. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$C=2\pi r,\qquad l_{n^\circ}=\pi r\frac{n}{180},\qquad S_{n^\circ}=\pi r^2\frac{n}{360},$$

$$S=\pi r^2,\qquad l_\alpha=r\alpha,\qquad S_\alpha=\frac{1}{2}r^2\alpha.$$

Площадь описанного многоугольника равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности.

Координаты и векторы

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Векторы. Сумма и разность векторов. Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется направленным отрезком или *вектором*.

Для того, чтобы сложить неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, достаточно отложить от какой-нибудь точки A векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ и построить параллелограмм $ABCD$. Тогда $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

Чтобы найти сумму $\vec{a}+\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ необходимо в конец вектора $\vec{a}$ поместить начало вектора $\vec{b}$ и провести вектор из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$.

Чтобы найти разность $\vec{a}-\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ необходимо в начало вектора $\vec{a}$ поместить начало вектора $\vec{b}$ и провести вектор из конца вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$.

Координаты вектора. Пусть точка A имеет координаты $(x_A;y_A)$, точка B имеет координаты $(x_B;y_B)$, а точка C — середина отрезка AB. Тогда координаты точки C равны полусумме соответствующих координат концов отрезка:

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right).$$

Пусть точка A имеет координаты $(x_A;y_A)$, точка B имеет координаты $(x_B;y_B)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны разности соответствующих координат конца вектора и его начала:

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;\,y_B-y_A).$$

Декартовы координаты вектора являются проекциями этого вектора на соответственные оси систем координат.

Модуль вектора (длина вектора) $\vec{a}$ вычисляется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$.

Пусть даны векторы $\vec{a} = (x_a; y_a)$, и $\vec{b} = (x_b; y_b)$. Тогда:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_a + x_b;\, y_a + y_b),$$
$$\vec{a} - \vec{b} = (x_a - x_b;\, y_a - y_b),$$
$$k\vec{a} = (kx_a;\, ky_a),$$

т. е. действиям с векторами отвечают идентичные действия с их координатами.

Скалярное произведение векторов. *Скалярным произведением двух ненулевых векторов* называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Иными словами, скалярное произведение векторов — это число. Если через φ обозначить угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а через $\vec{a} \cdot \vec{b}$ — их скалярное произведение, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi .$$

Скалярное произведение выражается через координаты сомножителей по формуле:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b .$$

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух ненулевых векторов является равенство нулю их скалярного произведения:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_a x_b + y_a y_b = 0.$$

Косинус угла φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}} .$$

Поскольку косинус острого угла положителен, а косинус тупого угла — отрицателен, то, если скалярное произведение положительно, векторы образуют острый угол, а если отрицательно — тупой.