

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАНИЯ В5: ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ

Проверяемые элементы содержания и виды деятельности: владение понятием уравнение, область определения уравнения, знание основных типов простейших уравнений, умение решать уравнения.

Ориентировочное время выполнения учащимися, изучающими математику на базовом уровне: 5—10 минут.

Типы заданий:

- Линейные и квадратные уравнения.
- Рациональные уравнения.
- Иррациональные уравнения.
- Показательные уравнения.
- Логарифмические уравнения.
- Тригонометрические уравнения.

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Два уравнения называются *равносильными*, если множества их корней совпадают (в том числе, уравнения, не имеющие корней, считаются равносильными). Обозначение: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow h(x) = \varphi(x)$.

Если все решения первого уравнения являются решениями второго уравнения (множество решений первого уравнения является подмножеством решений второго уравнения), то второе уравнение называется *следствием* первого уравнения. Обозначение: $f(x) = g(x) \Rightarrow h(x) = \varphi(x)$.

Таким образом, два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Теорема 1. Если любое выражение, входящее в уравнение, заменить тождественно равным ему на области определения уравнения выражением, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если к обеим частям уравнения прибавить выражение, имеющее смысл на области определения уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.

Следствие. Если любое слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, поменяв его знак на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Если обе части уравнения умножить (разделить) на выражение, имеющее смысл и отличное от нуля на области определения уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.

Линейные и квадратные уравнения

Линейные уравнения. Уравнение $ax = b$, где x — неизвестное, a и b — любые действительные числа, называется *линейным уравнением* относительно x . Если $a \neq 0$, оно имеет единственное решение тогда $x = \frac{b}{a}$. Если $a = b = 0$ его решением является любое действительное число. Если $a = 0$, $b \neq 0$, то линейное уравнение не имеет решений.

Квадратные уравнения. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где x — неизвестное, $a \neq 0$, b и c — любые действительные числа, называется *квадратным уравнением* относительно x . Выражение $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. В зависимости от значения дискриминанта квадратное уравнение на множестве действительных чисел может иметь два корня, один корень или не иметь корней. Если $D > 0$ уравнение имеет два корня $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, если $D = 0$ — один корень $x = -\frac{b}{2a}$, если $D < 0$ корней нет.

Иррациональные уравнения

ВНИМАНИЕ: ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

Иррациональные уравнения, включенные в задания ЕГЭ, являются уравнениями одного из трех типов: «корень нечетной степени равен числу», «корень четной степени равен числу» и «квадратный корень равен линейному выражению». Сформулируем теорему для решения уравнений указанных типов.

Решение простейших иррациональных уравнений. Пусть m — нечетное натуральное число, $m \geq 3$, n — четное натуральное число, a — любое число, $b \geq 0$. Тогда:

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{f(x)} = a &\Leftrightarrow f(x) = a^m, \\ \sqrt[n]{f(x)} = b &\Leftrightarrow f(x) = b^n, \\ \sqrt{f(x)} = g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases} \end{aligned}$$

Иными словами, обе части уравнений указанного вида возводят в степень так, чтобы избавиться от знака корня. Причем возведение в нечетную степень является равносильным преобразованием при любых значениях правой части, а возведение в четную степень является равносильным преобразованием только в случае неотрицательности правой части уравнения.

Примечание. К простейшим уравнениям следовало бы отнести уравнения вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$, однако соответствующие задания не включены в задания ЕГЭ.

Показательные уравнения

ВНИМАНИЕ: ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

Показательные уравнения, включенные в задания ЕГЭ, приводятся к одному из двух типов: $a^{f(x)} = a^b$ или $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Для этого могут понадобиться формулы свойств степеней $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $a^x : a^y = a^{x-y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$. Сформулируем теорему для решения уравнений указанных типов.

Решение простейших показательных уравнений. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда:

$$\begin{aligned} a^{f(x)} = a^b &\Leftrightarrow f(x) = b, \\ a^{f(x)} = a^{g(x)} &\Leftrightarrow f(x) = g(x). \end{aligned}$$

Примечание. К простейшим уравнениям следовало бы отнести уравнения $a^{f(x)} = b$ и уравнения $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, однако соответствующие задания не включены в задания ЕГЭ.

Логарифмические уравнения

ВНИМАНИЕ: ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

Логарифмические уравнения, включенные в задания ЕГЭ, приводятся к одному из трех типов: $\log_a f(x) = b$, $\log_{f(x)} a = b$, $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Для этого могут понадобиться формулы свойств логарифмов: $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$, $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$, $\log_a (b)^n = n \log_a b$. Сформулируем теорему для решения уравнений указанных типов.

Решение простейших логарифмических уравнений. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b,$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Тригонометрические уравнения

ВНИМАНИЕ: ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

В задания ЕГЭ включены простейшие тригонометрические уравнения относительно табличных значений синуса, косинуса, тангенса. Сформулируем теорему для решения уравнений указанных типов.

Решение простейших тригонометрических уравнений. Пусть $|a| \leq 1$, $b \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi n; \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos a + 2\pi n; \\ x = -\arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x = b \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} b + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Примечание. К простейшим уравнениям следовало бы отнести уравнения относительно табличных значений котангенса, но уравнения такого типа не входят в задания ЕГЭ.

Некоторые частные случаи

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Табличные значения обратных тригонометрических функций

$$\arcsin 0 = 0, \quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \arcsin \frac{1}{2} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arctg} 0 = 0, \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6},$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}.$$

Свойства обратных тригонометрических функций

$$\begin{aligned} \arcsin(-a) &= -\arcsin a, & \arccos(-a) &= \pi - \arccos a, \\ \operatorname{arctg}(-b) &= -\operatorname{arctg} b, & \operatorname{arcctg}(-b) &= \pi - \operatorname{arcctg} b. \end{aligned}$$