

# СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА В ШКОЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

О. А. ИВАНОВ

Санкт-Петербургский государственный университет

## CONTEMPORARY MATHEMATICS IN HIGH SCHOOL PROBLEMS

O. A. IVANOV

*Through the studying of certain high school problems such definitions as unstability and chaos in dynamic systems, some problems in discrete mathematics, and a general problem of the reasonable usage of contemporary technology are introduced.*

*На примерах исследования вполне школьных задач введены такие понятия как неустойчивость и хаос в динамических системах, некоторые вопросы дискретной математики и общей проблемы разумного использования современных вычислительных средств.*

Идея, которой руководствовался автор статьи, состояла не в том, чтобы ввести читателя в некоторую конкретную область современной математики, а в том, чтобы дать ему почувствовать современную математику на примере исследования вполне школьных задач (три из которых взяты автором из вариантов школьных выпускных экзаменов). А в качестве подзаголовка к этой статье уместно было бы написать: “Элементарная математика с точки зрения высшей” (см. [2]).

### 1. ФОРМУЛА ЕСТЬ, ДА ПОЛЬЗОВАТЬСЯ ЕЮ ЗАТРУДНИТЕЛЬНО...

**Задача 1.** Вычислите интеграл  $\int_0^1 x^{20} e^{-x} dx$ .

Одним из стандартных способов вычисления данного интеграла является интегрирование по частям.

Положим  $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ , тогда

$$I_n = -x^n e^{-x} \Big|_0^1 + n \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}.$$

Введем для удобства последовательность  $x_n = eI_n$ , для которой имеют место рекуррентное соотношение

$$x_n = nx_{n-1} - 1 \tag{1}$$

и начальное условие

$$x_0 = e \int_0^1 e^{-x} dx = e \left( 1 - \frac{1}{e} \right) = e - 1.$$

Поскольку  $e \approx 2,718\,282$ , то все, что осталось сделать, – это двадцать раз воспользоваться формулой (1), взяв  $x_0 = 1,718\,282$ . В наше время для этой цели безусловно следует использовать нечто типа программируемого калькулятора. Автор же для этой цели будет использовать пакет компьютерной алгебры “Mathematica” [6], установленный на достаточно современном компьютере P-166. То, что получилось, изображено на следующей

диаграмме (команда N[ ] выдает приближенное значение соответствующего числа):

```
x[n_]:=n*x[n-1]-1;x[0]=1.718282;
Print[N[x[20]/E]];
1.53532 1011
```

Не правда ли, этот результат несколько ошеломляет, поскольку мы ищем значение интеграла по отрезку [0; 1] от функции, также лежащей между 0 и 1? Попробуем поступить по-другому, взяв  $x_0 = N[E-1]$ . Таким образом, в данном случае в качестве приближенного значения для  $e$  используется то, которое встроено в данный пакет:

```
x[n_]:=n*x[n-1]-1;x[0]=N[E-1];
Print[N[x[20]/E]];
-129.369
```

Как вам кажется, этот результат интереснее предыдущего? Получилось вполне обозримое число, однако оно почему-то отрицательное...<sup>1</sup>

Попробуем воспользоваться командой, выдающей приближенное значение определенного интеграла:

```
NIntegrate[x^20*Exp[-x], {x, 0, 1}]
0.0183505
```

Полученный результат вполне разумен, однако мы, во-первых, не решили исходную задачу, а, во-вторых, наш опыт уже не позволяет быть вполне уверенными в точности полученного результата.

Проведенные нами вычисления показывают, так сказать, сверхнеустойчивость последовательности (1) по отношению к ее начальному значению. Для того чтобы выяснить причины такого ее поведения, исследуем зависимость значений этой последовательности от ее начального значения. Пусть  $\Delta_n = x_n - x'_n$ , тогда  $\Delta_n = n\Delta_{n-1}$ , откуда  $\Delta_{20} = 20!\Delta_0$ . Поскольку

```
Factorial[20]=2432902008176640000,
```

то если мы хотим получить несколько верных знаков в значении  $x_{20}$ , нам следует брать  $x_0$  с гораздо большей точностью, чем та, которая предполагается по умолчанию. Команда N[E-1, k] выдает в качестве результата число  $e - 1$  с  $k$  верными знаками; попробуем использовать ее:

```
x[n_]:=n*x[n-1]-1;x[0]=N[E-1, 22];
Print[N[x[20]/E]];
0.0183505
```

<sup>1</sup> Кстати в работе: Wagon S. A Deceptive Definite Integral // Math. in Educ. 1991. Vol. 1, № 3. P. 3-5 — при вычислениях по формулам (1) с использованием того же программного средства получались несколько другие числа.

Однако если взять чуть меньшую точность, то получаемый ответ снова бессмыслен:

```
x[n_]:=n*x[n-1]-1;x[0]=N[E-1, 20];
Print[N[x[20]/E]];
0.
```

Итак, хотя задача и решена, но полученное решение оставляет чувство неудовлетворенности. Ясно, что ни на каком калькуляторе получить верный ответ не удастся!

Исследование данной последовательности было включено в задание профильно-элитарного выпускного экзамена по математике в Санкт-Петербурге в 1993 году (задача была предложена профессором В.М. Рябовым):

Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  задана формулой  $x_n = nx_{n-1} - 1$ , а  $x_0 = c$ .

а) Докажите, что если  $c \leq 1$ , то данная последовательность монотонна;

б) докажите, что если  $c > 2$ , то при всех натуральных  $n$  верно неравенство  $|x_n/n!| \leq c$ ;

в) докажите, что если последовательность  $\{x_n\}$  сходящаяся, то она стремится к нулю;

г) докажите, что если число  $c$  рационально, то эта последовательность не имеет конечного предела.

Автор не приводит решения сформулированных утверждений, вместо этого проведем дополнительное исследование. Заметим прежде всего, что утверждение пункта в) можно усилить; нетрудно видеть, что если последовательность (1) ограничена, то она стремится к нулю, что становится очевидным, если переписать опережающее ее рекуррентное соотношение в виде

$$x_{n-1} = \frac{x_n + 1}{n}.$$

Теперь из формулы  $\Delta_n = n!\Delta_0$  следует, что существует не более одного начального значения  $c$ , для которого последовательность (1) является ограниченной. Наконец, ясно, что рассмотренная нами последовательность  $x_n = eI_n$  ограничена, поэтому  $c = e - 1$  является начальным данным ограниченной последовательности. Однако изначально связь изучаемой последовательности (1) с интегралами непонятна, поэтому для поиска начального значения ограниченной последовательности следует поступить по-другому. Именно

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{n!} &= \frac{x_n}{n} \frac{1}{(n-1)!} = \left(x_{n-1} - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{(n-1)!} = \frac{x_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \\ &= \frac{x_{n-2}}{(n-2)!} - \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \dots = x_0 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{n!}, \end{aligned}$$

таким образом,

$$x_n = n! \left( x_0 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{n!} \right).$$

Так как выражение в скобках в последней формуле стремится к  $x_0 - (e - 1)$ , то отсюда и следует необходимость равенства  $x_0 = e - 1$  для ограниченности этой последовательности.

Приведем, наконец, то вычисление исходного интеграла, которое является наиболее разумным, оставив его обоснование в качестве самостоятельного упражнения для заинтересованного читателя:

```
x[n_] := (x[n+1]+1)/(n+1); x[40]=0;
Print[N[x[20]/E]];
0.0183505
```

## 2. ЧТО ЖЕ ДЕЛАТЬ, ЕСЛИ НАДО ДЕЛИТЬ НА $\frac{n}{e}$ ЧАСТЕЙ... ИЛИ ДИСКРЕТНОЕ versus НЕПРЕРЫВНОЕ<sup>1</sup>

**Задача 2.** Найдите наибольшее значение произведения натуральных чисел, сумма которых равна данному числу  $k$ .

Итак, нужно найти наибольшее значение  $k_1 k_2 \dots k_n$ , где  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ ,  $k_i \in \mathbb{N}$ . Имеются два пути. Можно попробовать сделать при помощи компьютера полный перебор для некоторых значений  $k$  и постараться угадать ответ или же решить вначале задачу, в которой снято условие натуральности рассматриваемых чисел, то есть задачу нахождения наибольшего значения произведения  $x_1 x_2 \dots x_n$  при условии  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$ ,  $x_i \geq 0$ .

В силу неравенства Коши между средним арифметическим и средним геометрическим при фиксированном значении  $n$  произведение  $x_1 x_2 \dots x_n$  неотрицательных чисел с фиксированной суммой является наибольшим в том случае, когда все эти числа равны друг другу, так что их произведение равно  $\left(\frac{s}{n}\right)^n$ . Для того чтобы найти  $n$ , при котором это произведение является наибольшим, исследуем функцию  $f(x) = \left(\frac{s}{x}\right)^x$ . Удобно рассмотреть логарифм функции  $f$ , производная которого

$$(\ln f(x))' = \left(x \ln \frac{s}{x}\right)' = (x \ln s - x \ln x)' = \ln s - 1 - \ln x.$$

Таким образом, наибольшее значение функции  $f$  достигается при  $x = \frac{s}{e}$ . Однако по смыслу  $x$  как количества чисел оно обязано быть натуральным. Следовательно,  $s$  надо разбивать либо на  $\left[\frac{s}{e}\right]$ , либо на  $\left[\frac{s}{e}\right] + 1$  равных сла-

<sup>1</sup>versus (*лат.*) – против, в противовес.

гаемых, заведомо лежащих между 2 и 3 (автору неизвестен точный ответ; ср. [4]).

Вернемся к исходной задаче. Прделанное нами вычисление показывает, что разумно предположить, что  $k_i = 2$  или 3, однако пока это лишь предположение. Все-таки дискретную задачу нужно решать дискретными же методами!

**Лемма.** Если  $k > 2$ ,  $l \geq 2$ , то  $kl > k + l$ .

Действительно,  $kl - k - l = (k - 1)(l - 1) - 1 \geq 1$ .

В качестве следствия получаем, что если произведение  $k_1 k_2 \dots k_n$  наибольшее, то каждое из чисел  $k_i$  действительно должно быть 2 или 3. Для завершения решения осталось заметить, что  $2 + 2 + 2 = 3 + 3$ , а  $2^3 < 3^2$ .

Теперь попробуем провести компьютерный эксперимент. Вместо того чтобы перебирать все варианты представления фиксированного натурального числа  $n$  в виде суммы натуральных слагаемых, будем искать наибольшие значения соответствующих произведений последовательно для  $n = 1, 2, \dots, n$ . Предлагаемый ниже алгоритм хотя и не является оптимальным, но вполне подходит для наших целей.

Обозначим через  $f(k)$  искомое наибольшее значение произведения натуральных чисел, сумма которых равна  $k$ . Основная идея состоит в следующем: если  $f(k) = k_1 k_2 \dots k_n$ , то либо  $n = 1$  и  $f(k) = k$  (к примеру, при  $k = 2, 3$ ), либо  $f(k) = f(a)f(b)$  для некоторой пары натуральных чисел  $a, b$ ,  $a + b = k$ . Тем самым функция  $f$  может быть определена рекуррентно по формуле

$$f(k) = \max\{k, f(i)f(k-i) \mid i = 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Данное определение было положено в основу программы, написанной на языке пакета "Mathematica". Заметим, что поскольку нас интересуют сомножители числа  $f(k)$ , то в программе предусмотрено разложение этого числа на простые множители, осуществляемое командой `FactorInteger[ ]`. К примеру, указанный для  $i = 52$  ответ  $\{\{2, 2\}, \{3, 16\}\}$  означает, что  $f(52) = 2^2 \cdot 3^{16}$ . Из приводимой ниже таблицы совершенно ясно, что

$$f(k) = 2^u \cdot 3^v, \text{ где } u = 0, 1, 2, \text{ и } k = 2u + 3v.$$

```
ClearAll[f];
f[n_Integer] := f[n] = Block[{s=n, k=n},
Do[s = If[s > f[i] * f[k-i], s, f[i] * f[k-i]],
{i, k-1}]; Return[s]]; f[1] = 1;
Do[Print["i=", i, " ", FactorInteger[f[i]]],
{i, 30, 60}];
i = 50 {{2, 1}, {3, 16}}
i = 51 {3, 17}
i = 52 {{2, 2}, {3, 16}}
i = 53 {{2, 1}, {3, 17}}
i = 54 {3, 18}
i = 55 {{2, 2}, {3, 17}}
```

$i = 56\{\{2, 1\}, \{\{3, 18\}\}$   
 $i = 57\{3, 19\}$   
 $i = 58\{\{2, 2\}, \{3, 18\}\}$   
 $i = 59\{\{2, 1\}, \{3, 19\}\}$   
 $i = 60\{3, 20\}$

Теперь небольшой заключительный комментарий, раскрывающий смысл отдельных команд приведенной выше программы и касающийся реальных, а не гипотетических возможностей пакета “Математика”. Последний оператор `Do[... , {i, 30, 60} ]` осуществляет вычисление, разложение на множители и печать значений функции  $f(i)$  для  $i = 30, 31, \dots, 60$ . Казалось бы, если мы попросим компьютер найти значения этой функции для  $i = 50, 51, \dots, 60$ , то ему надо проделать меньшую работу. Однако аналогичная программа, в последней строчке которой стоит `...{i, 50, 60}...`, вообще отказывается что-либо вычислять! Это связано с необходимостью раскрыть рекурсивное определение функции  $f$  для того, чтобы вычислить  $f(50)$ . Можно провести эксперимент, результаты которого покажут, что  $f(30)$  еще можно найти при помощи написанной программы, а  $f(40)$  уже нет. Именно для того, чтобы обойти эту трудность, в первой строчке стоят дополнительные операторы. Команда `=f[n]=` в определении функции  $f$  указывает на то, что вычисленные значения этой функции будут запоминаться и использоваться в дальнейших вычислениях, а результатом выполнения самой первой команды `ClearAll[f]` является стирание из памяти всех значений функции  $f$ , найденных при предыдущем обращении к программе (что необходимо для проведения последовательных экспериментов без закрытия самого пакета “Математика”).

### 3. ХАОС, ХАОС, ...

Следующая задача также предлагалась на профильно-элитарном выпускном экзамене (в 1997 году; см. [3]).

**Задача 3.** Последовательность  $\{x_n\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , задана соотношениями

$$x_{n+1} = 2x_n^2 - 1, \quad x_0 = c. \quad (2)$$

- а) Найдите все  $c$ , при которых  $x_2 > 0$ ;
- б) докажите, что если  $c > 1$ , то эта последовательность монотонна;
- в) найдите все непостоянные конечные арифметические прогрессии, образованные последовательными членами указанной последовательности;
- г) докажите, что существуют последовательности данного вида, имеющие сколь угодно большой период.

Нас будет особо интересовать поведение последовательностей с начальными значениями  $c \in [-1; 1]$ , поскольку в силу пункта б) последовательности с на-

чальными значениями  $|c| > 1$  ведут себя достаточно регулярно.

Ясно, что если  $c \in [-1; 1]$ , то  $x_n \in [-1; 1]$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Поэтому никакого “убегания в бесконечность”, как в задаче 1, здесь быть не может; все последовательности с начальными данными из отрезка  $[-1; 1]$  ограничены. Ясно также, что имеются две постоянные последовательности (при  $c = 1$  и  $c = -\frac{1}{2}$ ). В табл. 1 приведены несколько (вычисленных при помощи компьютера) значений трех последовательностей, начальные данные которых близки к 1.

**Таблица 1**

$n = 0$	0,999999	0,9999	0,99
$n = 61$	-0,000541	-0,907108	-0,465659
$n = 67$	0,999400	-0,891356	0,914855
$n = 71$	0,850384	0,320731	0,933339
$n = 79$	-0,890155	-0,325981	0,969685

Какие выводы можно сделать по результатам этого эксперимента? Ясно видно, что, так же как и рассмотренная в первом разделе последовательность (1), последовательность (2) обладает высокой чувствительностью по отношению к своим начальным значениям, а потому полученным численным значениям нельзя доверять; компьютер здесь бесполезен! Однако, как будет видно далее, он все-таки является полезным орудием в руках разумного математика.

Введем квадратичную функцию  $f(x) = 2x^2 - 1$ , так что  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Попробуем вначале найти все монотонные последовательности  $\{x_n\}$ ,  $x_0 \in [-1; 1]$ . С геометрической точки зрения ответ очевиден, для чего достаточно проанализировать поведение данной последовательности, используя приведенную на рис. 1 диаграмму Ламерея (см. [1]).

**Утверждение.** Если последовательность (2), где  $c \in [-1; 1]$ , монотонна, то она стационарна, таким образом,  $c = 1$  или  $c = -\frac{1}{2}$ .

Поскольку  $x_n \in [-1; 1]$ , то последовательность (2) монотонна и ограничена, поэтому она имеет предел. Пусть  $x_n \rightarrow a$ . Тогда  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ , но так как  $f(x_n) = x_{n+1}$ , то отсюда следует, что  $f(a) = a$ , то есть  $a = 1$  или  $a = -\frac{1}{2}$ . Покажем теперь, что  $a = 1$  не может быть пределом этой последовательности. Действительно, если монотонная последовательность  $x_n \in [-1; 1]$  стремится

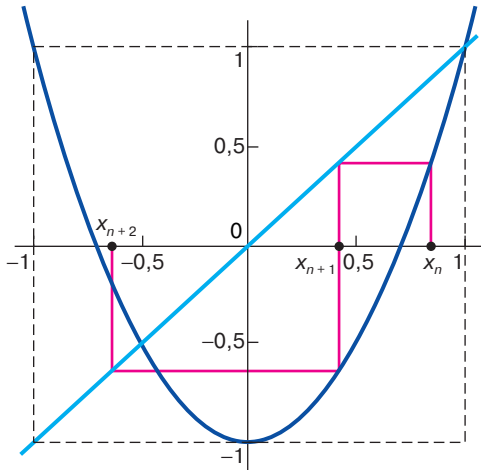


Рис. 1

к 1, то она является монотонно возрастающей. Однако разность

$$x_{n+1} - x_n = 2x_n^2 - x_n - 1 = (x_n - 1)(2x_n + 1)$$

отрицательна при  $x_n \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ , поэтому возрастающей данная последовательность быть не может.

Второй случай,  $a = -\frac{1}{2}$ , исследуем иначе. Рассмотрим разность  $\xi_n = \left|x_n + \frac{1}{2}\right|$ . Имеем

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= \left|x_{n+1} + \frac{1}{2}\right| = \left|f(x_n) - f\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \\ &= |f'(\theta_n)| \left|x_n + \frac{1}{2}\right| = |f'(\theta_n)| \xi_n \end{aligned}$$

(по формуле Лагранжа; число  $\theta_n$  лежит между  $x_n$  и  $-\frac{1}{2}$ ).

Если  $x_n$  достаточно близко к  $-\frac{1}{2}$ , то производная  $f'(\theta_n)$

близка к  $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$ , в частности, справедливо неравенство

$$|f'(\theta_n)| > 1.$$

Таким образом,  $\xi_{n+1} > \xi_n$ , откуда следует, что  $\xi_n \rightarrow 0!$  Лемма доказана.

Следующий тип ограниченных последовательностей, поведение которых можно назвать регулярным, — это периодические последовательности. Ясно, что начальные данные периодических последовательностей являются решениями уравнения

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{f(f(\dots(f(x)\dots))}_{n \text{ раз}} = x. \quad (3)$$

В нашем случае в левой части уравнения (3) стоит многочлен степени  $2^n$ . Вычисление коэффициентов этих многочленов делать вручную не слишком приятно, так, к примеру,

$$f_3(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1.$$

Итак, уравнение (3) может иметь не более  $2^n$  вещественных корней. На рис. 2 изображены графики многочленов  $f_n$  при  $x \in [-1; 1]$  для  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ , из которого ясно, что уравнение (3) действительно должно иметь  $2^n$  корней.

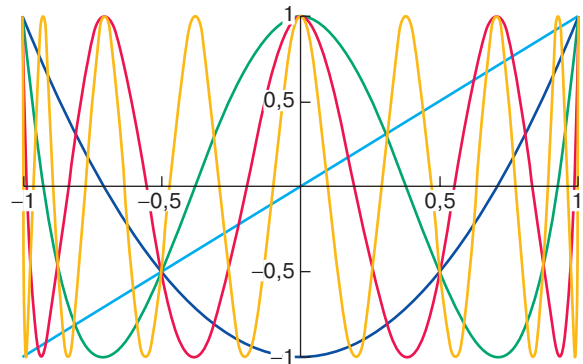


Рис. 2

Попробуем теперь представить себе качественную картину поведения многочленов  $f_n(x)$  чисто математически. Заметим, что  $f([-1; 0]) = f([0; 1]) = [-1; 1]$ , причем многочлен  $f$  является монотонной функцией на каждом из отрезков  $[-1; 0]$ ,  $[0; 1]$ . Пусть  $x_1, x_2$  — корни уравнения  $f(x) = 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} f([-1; x_1]) &= [0; 1], & f([x_1; 0]) &= [-1; 0], \\ f([0; x_2]) &= [-1; 0], & f([x_2; 1]) &= [0; 1] \end{aligned}$$

(см. рис. 2), поэтому на каждом из этих четырех отрезков функция  $f_2(x)$  монотонна и принимает значения между  $-1$  и  $1$ . Далее каждый из корней уравнения  $f(x) = x$  является, очевидно, и корнем уравнения  $f_2(x) = x$ . Поэтому из четырех корней последнего уравнения только два определяют последовательность периода 2.

Заметим, что если  $f_k(p) = p$  и  $f_l(p) = p$ , то  $f_{(k, l)}(p) = p$  (здесь  $(k, l)$  — наибольший общий делитель чисел  $k$  и  $l$ ).

**Теорема.** 1. Для каждого натурального числа  $n$  уравнение (3) имеет  $2^n$  действительных корней, каждый из которых является начальным значением

последовательности (2), имеющей некоторый делитель  $d$  числа  $n$  своим периодом.

2. Всякая такая периодическая последовательность является неустойчивым решением рекуррентного соотношения (2).

3. Множество точек периодических решений соотношения (2) всюду плотно на отрезке  $[-1; 1]$ .

Приведем необходимые

**Определения.** Периодическая последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  называется неустойчивым решением, если существует такое  $\varepsilon > 0$ , что при всяком  $\delta > 0$  найдется такая последовательность  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ , также являющаяся решением соотношения (2), что  $|x_0 - y_0| < \delta$  и  $|x_n - y_n| \geq \varepsilon$  при некотором  $n \in \mathbb{N}$ .

Множество  $\mathcal{A} \subset [-1; 1]$  называется *всюду плотным*, если оно пересекается с любым содержащимся в отрезке  $[-1; 1]$  интервалом.

**Доказательство теоремы 1.** Сделаем в уравнении  $f_n(x) = x$  замену  $x = \cos t$ . Поскольку  $f(x) = 2x^2 - 1$ , то  $f(\cos t) = \cos 2t$ , значит,  $f_n(\cos t) = \cos(2^n t)$ . Таким образом, в результате проведенной замены получим уравнение

$$\cos(2^n t) = \cos t,$$

решениями которого являются числа

$$t = \cos \frac{2\pi k}{2^n \pm 1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Решениями исходного уравнения являются числа

$$p_0 = 1, \quad p_k^{(n)} = \cos \frac{2\pi k}{2^n + 1}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^{n-1},$$

$$q_k^{(n)} = \cos \frac{2\pi k}{2^n - 1}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1.$$

Покажем, что  $p_k^{(n)} \neq q_k^{(n)}$ . Поскольку каждый из аргументов входящих в них косинусов лежит в отрезке  $[0; \pi]$ , то достаточно показать, что  $\frac{2\pi k}{2^n + 1} \neq \frac{2\pi l}{2^n - 1}$ , что верно в силу взаимной простоты чисел  $2^n + 1$  и  $2^n - 1$ .

Таким образом, мы сумели даже найти формулы для всех решений уравнения, определяющего начальные значения последовательностей, период которых является делителем числа  $n$ .

2. Для доказательства п. 2 теоремы воспользуемся следующим утверждением (см. вторую часть доказательства данного выше утверждения).

**Лемма.** Если  $|(f_n)'(p)| > 1$  и  $f_n(p) = p$ , то  $p$  является начальным данным периодической последовательности, являющейся неустойчивым решением соотношения (2).

В силу данной леммы нам достаточно вычислить производные  $(f_n)'(x)$  при  $x = p_k^{(n)}$  и  $x = q_k^{(n)}$  (ясно, что  $(f_n)'(p_0) = 4^n > 1$ ). Имеем

$$\left| \frac{d}{dx} f_n(x) \right| = \left| \frac{\frac{d}{dt} f_n(\cos t)}{\frac{d}{dt} \cos t} \right| = \left| \frac{(\cos(2^n t))'}{(\cos t)'} \right| =$$

$$= \left| \frac{2^n \sin(2^n t)}{\sin t} \right| = 2^n > 1,$$

так как числа  $x = p_k^{(n)}$  и  $x = q_k^{(n)}$  являются решениями уравнения  $\cos(2^n t) = \cos t$ .

3. Рассмотрим произвольный интервал  $(\alpha; \beta) \subset [-1; 1]$ . По непрерывности косинуса множество  $\{t \in [0; \pi] \mid \cos t \in (\alpha; \beta)\}$  также является интервалом; обозначим его  $(u; v)$ . Выберем число  $n$  настолько большим, что  $(v - u)(2^n + 1) > 2\pi$ . Ясно, что найдется натуральное

число  $k$ , такое, что  $\frac{2\pi k}{2^n + 1} \in (u; v)$ , таким образом,  $p_k^{(n)} \in (\alpha; \beta)$ .

Теорема доказана.

**Замечание.** Можно показать, что число решений периода  $n$  равно

$$2^n - \sum_{k_i | n} 2^{k_i} + \sum_{k_i > k_j | n} 2^{(k_i, k_j)} - \sum_{\dots} 2^{(k_i, k_j, k_l)} + \dots$$

(здесь  $k_i, k_j, \dots$  — делители числа  $n$  и через  $(k_i, k_j, \dots)$  для краткости обозначены наибольшие общие делители соответствующих чисел).

Таким образом, совсем простая квадратичная функция  $f(x) = 2x^2 - 1$  определяет отображение отрезка  $[-1; 1]$  в себя, порождающее такое движение его точек, которому нет иного названия, как хаотическое (см. [1, 5]).

## 4. ДИССИПАТИВНОЕ СООТНОШЕНИЕ В МНОЖЕСТВЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Последняя из рассматриваемых в статье задач предлагалась на выпускном экзамене в школах Великобритании<sup>1</sup>.

**Задача 4.** Рассматриваются последовательности натуральных чисел, определенных условиями:

$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$ , если число  $x_n$  четно, и  $x_{n+1} = x_n + 9$ , если  $x_n$  нечетно. Найдите все периодические последовательности указанного вида.

К примеру, если  $x_1 = 1$ , то получаем последовательность

<sup>1</sup> Ahmed A., Williams H. What Is Mathematics All About? (Workshop at CIEAEM-50), Neuchâtel (Switzerland), 1998.

1, 10, 5, 14, 7, 16, 8, 4, 2, 1, ...;

при  $x_1 = 11$  имеем

11, 20, 10, 5, 14, 7, 16, ...,

так что данная последовательность периодической не является.

Рассматривая последовательно все большие начальные значения, можно обнаружить еще две периодические последовательности

3, 12, 6, 3, ... и 9, 18, 9, ...

**Лемма.** Если  $x_n > 18$ , то  $x_{n+2} < x_n$ .

Рассмотрим три случая. Если  $x_n = 2k + 1$ , то  $x_{n+2} = k + 5$ , поэтому  $x_{n+2} < x_n$  при  $k > 4$ , то есть при  $x_n > 9$ . Если  $x_n = 4k$ , то  $x_{n+2} = k < x_n$ . Наконец, если  $x_n = 4k + 2$ , то  $x_{n+2} = 2k + 10$ , поэтому  $x_{n+2} < x_n$  при  $k > 4$ , то есть при  $x_n > 18$ .

**Следствия.** 1. Во всякой последовательности содержится член, не превосходящий 18.

2. Существуют ровно три периодические последовательности.

3. Начиная с некоторого номера всякая последовательность является периодической.

В качественной теории дифференциальных уравнений есть понятие диссипативной системы (см. [1]), которое означает, что по прошествии некоторого времени всякая точка пространства входит в некоторое ограниченное множество. Рассмотрим движение точки в множестве  $\mathbb{N}$ , определенное условиями задачи 4. Еще одним следствием доказанной леммы является то, что начиная с некоторого номера все члены последовательности не превосходят 26. Далее в теории диссипативных систем представляет интерес изучение структуры инвариантных притягивающих множеств данной системы. Не давая точного определения, заметим, что их роль в нашем случае играют три найденные периодические последовательности (см. следствие 3).

В заключение отметим, что, как всякая хорошая задача, задача 4 порождает множество других вопросов (для самостоятельного исследования). К примеру, как по первому члену данной последовательности определить, какая из трех периодических последовательностей

появится в ее хвосте? Из доказательства ясно, что при замене числа 9 в условии задачи 4 на произвольное нечетное натуральное число  $p$  полученное соотношение будет по-прежнему порождать диссипативное движение в  $\mathbb{N}$ , откуда следует, что всякая последовательность будет иметь в качестве своего хвоста одну из периодических последовательностей из некоторого их конечного набора. Существует ли алгоритм, позволяющий найти все такие периодические последовательности по данному числу  $p$ ? Наконец, заинтересованный читатель может самостоятельно сформулировать и другие вопросы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бельх В.Н. Элементарное введение в качественную теорию и теорию бифуркаций динамических систем // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 1. С. 115–121.
2. Иванов О.А. Избранные главы элементарной математики. СПб: Изд-во СПбГУ, 1995. 224 с. (англ. пер. Easy as  $\pi$ ? An Introduction to Higher Mathematics. N.Y., B., Heidelberg: Springer, 1998. 205 p.).
3. Иванов О.А. Задачи профильно-элитарного выпускного экзамена (Санкт-Петербург) // Математика. 1998. № 11/12.
4. Иванов О.А. Такие разные олимпиадные задачи // Там же. № 18.
5. Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В. Динамика одномерных отображений. Киев: Наук. думка, 1989. 216 с.
6. Wolfram S. Mathematica. N.Y. etc.: Addison-Wesley, 1996. 960 p.

Рецензент статьи Ю.Г. Мартыненко

\* \* \*

Олег Александрович Иванов, доктор педагогических и кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей геометрии Санкт-Петербургского государственного университета. В последние годы активно интересуется проблемами преподавания математики в средней школе и подготовки учителей для системы среднего образования. Автор и соавтор двух учебных пособий и 21 научной работы в области качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и топологии многообразий.