

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1. В клетке находятся фазаны и кролики, причем голов — 15, а ног — 48. Сколько кроликов и фазанов обитает в клетке?

Задача 2. Купец купил 138 аршин черного и синего сукна, заплатив 540 рублей. Аршин черного сукна стоит 3 рубля, а синего — 5 рублей. Сколько он купил того и другого сукна?

Задача 3. Океанский лайнер отправился в рейс. Когда он отошел от берега на 180 километров, за ним, со скоростью в 10 раз больше скорости лайнера, вылетел самолет. На каком расстоянии от берега самолет догонит лайнер?

Задача 4. Расстояние между пунктами A и B равно 96 километров. Из пункта A одновременно отправились вниз по течению плот и катер. Известно, что катер дошел до пункта B и вернулся обратно за 14 часов, встретив на обратном пути плот в 24 километрах от пункта A . Найдите собственную скорость катера и скорость течения реки.

Задача 5. Расстояние между пунктами A и B равно 40 километров. Из пункта A в пункт B выезжает мотоциклист со скоростью 23 км/ч. Из пункта B в пункт A уже движется мотоциклист со скоростью 17 км/ч. От одного мотоциклиста к другому (из A в B) с начала движения до момента встречи без усталости летает муха. Сколько километров она налетает, если: а) ее скорость равна 40 км/ч, б) ее скорости 40 км/час при движении из A в B и 30 км/час на обратном пути.

Задача 6. Цену на товар снизили на 10 %, затем еще на 10 %. В другой фирме цену снизили сразу на 20 %. Где выгоднее купить товар?

Задача 7. Из бутылки с 12%-ным раствором соли вылили 1 литр раствора и сосуд долили водой, затем повторили эту операцию. Найдите объем сосуда, если в нем остался 3%-ный раствор соли.

Задача 8. Из сосуда, до краев наполненного глицерином, вылили 2 литра глицерина и залили на их место 2 литра воды, после перемешивания снова вылили 2 литра получившегося и опять залили 2 литра воды. Затем повторили эту в третий раз. В итоге воды стало на 3 литра больше, чем глицерина. Сколько в этом сосуде воды и глицерина?

Задача 9. Имеются 80%-ный и 20%-ный растворы кислоты. В каком соотношении их надо смешать друг с другом, чтобы получить 60%-ный раствор кислоты? По сколько литров их нужно взять, если требуется 30 литров этого раствора?

Задача 10. Велосипедист, пешеход и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда велосипедист и мотоциклист находились в одной точке, пешеход был впереди уже на 10 километров. Когда мотоциклист его догнал, велосипедист отставал от них на 5 километров, а когда пешехода догнал велосипедист, мотоциклист находился на расстоянии x километров от них. Найдите x .

Задача 11. Два тела, движущиеся по окружности в одном направлении, встречаются каждые 112 минут, а движущиеся в противоположные стороны — каждые 16 минут. Во втором случае за 12 секунд тела сблизились на 14 метров (считая по окружности). Сколько метров в минуту проходит каждое тело? Какова длина окружности?

Задача 12. По окружности радиуса R в одинаковом направлении движутся две точки со скоростями v_1 и v_2 . Они начинают движение из диаметрально противоположных точек. Найдите расстояние между ними (не по окружности) через время t .

Задача 13. Расстояние между двумя колхозами — 12 километров. Колхозник вышел из своего колхоза в 9 часов 25 минут, а пришел в другой в 13 часов 15 минут. На следующий день он отправился в обратный путь в 11 часов и пришел к 14 часам 40 минутам. Укажите, на каком расстоянии от его колхоза находится пункт, который он проходил в одно и то же время как на прямом, так и на обратном пути.

Задача 14. Два пешехода идут навстречу друг другу, один из пункта A , другой из пункта B . Первый выходит из пункта A на 6 часов позже, чем второй из пункта B , и при встрече, оказывается, что он прошел на 12 километров меньше второго. Продолжая после встречи путь с той же скоростью, первый приходит в пункт B через 8 часов, а второй приходит в пункт A через 9 часов после встречи. Найдите их скорости.

Задача 15. Два туриста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B . При встрече оказалось, что первый приехал на 30 километров больше другого и через 4 дня будет в пункте B , а второй попадет в пункт A через 9 дней после встречи. Найдите $|AB|$.

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи, решаемые арифметически

Задача 1. В клетке находятся фазаны и кролики, причем голов — 15, а ног — 48. Сколько кроликов и фазанов обитает в клетке?

I способ.

Пусть x — фазаны, а y — кролики.

Решим систему

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ 2x + 4y = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 - y, \\ 2(15 - y) + 4y = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 - y, \\ 2y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = 9. \end{cases}$$

II способ.

Если все животные — фазаны, то у них 30 лап, а по условию их 48. Для преобразования фазана в кролика требуется 2 ноги. Итого кроликов $\frac{18}{2} = 9$, а фазанов — $15 - 9 = 6$.

Ответ: 9 кроликов, 6 фазанов.

Задача 2. Купец купил 138 аршин черного и синего сукна, заплатив 540 рублей. Аршин черного сукна стоит 3 рубля, а синего — 5 рублей. Сколько он купил того и другого сукна?

Пусть все купленное сукно черное, тогда оно бы стоило 414 рублей, но потрачено 540 рублей.

Осталось 126 рублей. Куплено $\frac{126}{2} = 63$ аршина синего сукна, остальные 75 аршин — черное сукно.

Ответ: 63 аршина синего сукна, 75 — черного.

Задача 3. Океанский лайнер отправился в рейс. Когда он отошел от берега на 180 километров, за ним, со скоростью в 10 раз больше скорости лайнера, вылетел самолет. На каком расстоянии от берега самолет догонит лайнер?

I способ.

Скорость сближения равна $10v - v = 9v$. За время полета самолета лайнер пройдет путь в 9 раз меньше пути самолета, то есть $\frac{180}{9} = 20$ километров от берега. Тогда точка встречи — 200 километров от берега.

II способ.

$$vt + 180 = 10vt \Leftrightarrow vt = 20.$$

Таким образом, расстояние равно $180 + 20 = 200$ километров от берега.

Ответ: на расстоянии, равном 200 километров от берега.

Задача 4. Расстояние между пунктами A и B равно 96 километров. Из пункта A одновременно отправились вниз по течению плот и катер. Известно, что катер дошел до пункта B и вернулся обратно за 14 часов, встретив на обратном пути плот в 24 километрах от пункта A . Найдите собственную скорость катера и скорость течения реки.

I способ.

1. Отношение скоростей катера по и против течения равно $\frac{96}{72} = \frac{4}{3}$.

2. Отношение времен движения тогда — $\frac{3}{4}$, причем всего 14 часов. Тогда катер плыл 6 и 8 часов соответственно, его скорости были $96/6$ и $72/6$ км/час, а скорость течения реки $0,5(96-72)=2$ км/час, собственная скорость катера 14 км/час.

II способ.

Пусть v (км/ч) — собственная скорость катера, а u (км/ч) — скорость течения реки.

Решим систему

$$\begin{cases} \frac{96}{v+u} + \frac{96}{v-u} = 14, \\ \frac{96}{v+u} + \frac{72}{v-u} = \frac{24}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u, v > 0, \\ 48(v-u) + 48(v+u) = 7(v+u)(v-u), \Leftrightarrow \\ 4(v-u)u + 3(v+u)u = (v+u)(v-u) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u, v > 0, \\ 96v = 7(v+u)(v-u), \Leftrightarrow \\ 7vu - u^2 = v^2 - u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u, v > 0, \\ 96v = 7(v+u)(v-u), \Leftrightarrow \\ v(7u - v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u, v > 0, \\ 96v = 7(v+u)(v-u), \Leftrightarrow \\ v = 7u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u, v > 0, \\ 672u = 336u^2, \Leftrightarrow \\ v = 7u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2, \\ v = 14. \end{cases}$$

Ответ: 14 км/ч и 2 км/ч.

Две важные задачи про муху

Расстояние между пунктами A и B равно 40 километров. Из пункта A в пункт B выезжает мотоциклист со скоростью 23 км/ч. Из пункта B в пункт A уже движется мотоциклист со скоростью 17 км/ч. От одного мотоциклиста к другому (из A в B) с начала движения до момента встречи без усталости летает муха. Сколько километров она налетает, если: а) ее скорость равна 40 км/ч, б) ее скорости 40 км/час при движении из A в B и 30 км/час на обратном пути.

а) За час, летая со скоростью 40 км/час, муха налетала 40 километров.

б) Пусть в направлении из пункта A в пункт B муха пролетела x километров, а в обратном направлении — $x - 23$ километра, тогда потраченное время есть:

$$\frac{x}{40} + \frac{x-23}{30} = 1 \Leftrightarrow 30x + 40(x-23) = 120 \Leftrightarrow x = \frac{104}{7} \text{ км.}$$

А пройденный путь есть $x + (x-23) = \frac{263}{7} \Leftrightarrow x = \frac{212}{7}$ км. Т. е. муха пролетит $30\frac{2}{7}$ км.

Примечание: зачастую удобнее рассматривать весь процесс в целом, а не его отдельные части.

Задачи на проценты

Задача 1. Цену на товар скинули на 10 %, затем еще на 10 %. А в другой фирме цену скинули сразу на 20 %. Где выгоднее купить товар?

Пусть начальный уровень цен — x рублей. Тогда

1. Первая фирма — $0,81x$, цена опустилась на 19 %.

2. Вторая фирма — $0,8x$, цена опустилась на 20 %.

Ответ: выгоднее купить товар во второй фирме.

Задача 2. Из бутылки с 12%-ным раствором соли вылили 1 литр раствора и сосуд долили водой, затем повторили эту операцию. Найдите объем сосуда, если в нем остался 3%-ный раствор соли.

Будем следить за количеством соли в сосуде объемом x литров.

1. До переливания: 12 %, $0,12x$, доля — $0,12$.

2. После первой операции: $0,12x - 0,12 \cdot 1$, доля составит $\frac{0,12x - 0,12}{x}$.

3. После второй операции: $0,12x - 0,12 - \frac{0,12x - 0,12}{x} = \frac{0,12(x-1)^2}{x}$, доля — $\frac{0,12(x-1)^2}{x^2}$.

Решим уравнение

$$\frac{0,12(x-1)^2}{x^2} = 0,03 \Leftrightarrow 0,12(x-1)^2 = 0,03x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,12x^2 - 0,24x + 0,12 - 0,03x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}, \\ x = 2. \end{cases}$$

Так как $x > 1$ (по условию), то $x = 2$.

Ответ: объем сосуда — 2 литра.

Задача 3. Из сосуда, до краев наполненного глицерином, вылили 2 литра глицерина и залили на их место 2 литра воды, после перемешивания снова вылили 2 литра получившегося и опять залили 2 литра воды. Затем повторили эту операцию в 3 раз. В итоге воды стало на 3 литра больше, чем глицерина. Сколько в этом сосуде воды и глицерина?

Будем следить за глицерином.

1. Пусть вначале его было x литров, доля — 1.

2. После первого переливания осталось $x - 2$ литра, доля — $\frac{x-2}{x}$.

3. После второго переливания осталось $x - 2 - \frac{2(x-2)}{x} = \frac{(x-2)^2}{x}$ литров, доля составила $\frac{(x-2)^2}{x^2}$.

4. После третьего переливания осталось $\frac{(x-2)^3}{x^2}$ литров, доля — $\frac{(x-2)^3}{x^3}$.

Решим уравнение

$$\frac{(x-2)^3}{x^2} + \frac{(x-2)^3}{x^3} + 3 = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 2(x-2)^3 + 3x^2 = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 2(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + 3x^2 = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ (x-1)(x^2 - 8x + 16) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 4. \end{cases} \end{cases}$$

По смыслу задачи $x > 2$, тогда 4 литра — искомая емкость сосуда, тогда глицерина — 0,5 литров, а воды — 3,5.

Ответ: воды — 3,5 литра, глицерина — 0,5.

Задача 4. Имеются 80%-ный и 20%-ный растворы кислоты. В каком соотношении их надо смешать друг с другом, чтобы получить 60%-ный раствор кислоты? По сколько литров их нужно взять, если требуется 30 литров этого раствора?

I способ.

Правило «Креста»

$$\begin{array}{ccc} 20\% & & 20\% \\ & \diagdown & \diagup \\ & 60\% & \\ & \diagup & \diagdown \\ 80\% & & 40\% \end{array}$$

Смешиваем в отношении $\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$. Нужно 10 литров 80 % раствора и 20 литров 20 % раствора.

II способ.

Пусть взято x литров 80%-го раствора и y литров 20%-го раствора.

Решим систему

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 0,2x + 0,8y = 0,6(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 - y \\ 2x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10, \\ y = 20. \end{cases}$$

Ответ: 10 литров 80%-го раствора и 20 литров 20%-го раствора.

Задача 5. Велосипедист, пешеход и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда велосипедист и мотоциклист находились в одной точке, пешеход был впереди уже на 10 километров. Когда мотоциклист его догнал, велосипедист отставал от них на 5 километров, а когда пешехода догнал велосипедист, мотоциклист находился на расстоянии x километров от них. Найдите x .

Примечание: если систему из трех уравнений с шестью переменными решить не удастся, то надо попробовать решить задачу арифметическим способом.

Пусть v_M (км/ч), v_B (км/ч), v_P (км/ч) — скорости мотоциклиста, велосипедиста и пешехода, соответственно. Известно так же, что t_1 — время встречи мотоциклиста и велосипедиста, t_2 — время встречи мотоциклиста и пешехода и t_3 — время встречи велосипедиста и пешехода.

Решим систему

$$\begin{cases} v_M(t_2 - t_1) = v_P(t_2 - t_1) + 10 \\ v_B(t_2 - t_1) = v_P(t_2 - t_1) + 5 \\ v_B(t_3 - t_2) = v_P(t_3 - t_2) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v_M - v_P)(t_2 - t_1) = 10 & (1), \\ (v_B - v_P)(t_2 - t_1) = 5 & (2), \\ (v_B - v_P)(t_3 - t_2) = 5 & (3). \end{cases}$$

Таким образом,

$$x = v_M(t_3 - t_2) - v_P(t_3 - t_2) = (v_M - v_P)(t_3 - t_2).$$

Найти введенные переменные порознь невозможно, однако можно найти их комбинации. Так как из второго и третьего уравнений следует, что $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$, то

$$\begin{aligned} (v_M - v_P)(t_2 - t_1) &= (v_M - v_P)(t_3 - t_2) = 10, \\ x &= \frac{(1)}{(2)} \cdot (3) = 10 \text{ км.} \end{aligned}$$

Ответ: 10 километров.

Задачи на движение по окружности

Задача 1. Два тела, движущиеся по окружности в одном направлении, встречаются каждые 112 минут, а движущиеся в противоположные стороны — каждые 16 минут. Во втором случае за 12 секунд тела сблизились на 14 метров (считая по окружности). Сколько метров в минуту проходит каждое тело? Какова длина окружности?

Пусть v_1 и v_2 — скорости тел, c — длина окружности.

Решим систему

$$\begin{cases} \frac{c}{v_2 - v_1} = 112 \\ \frac{c}{v_2 + v_1} = 16 \\ \frac{v_2 + v_1}{5} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 - v_1 = \frac{70 \cdot 16}{112} \\ v_2 + v_1 = 70 \\ c = 70 \cdot 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 30 \text{ м/мин,} \\ v_2 = 40 \text{ м/мин,} \\ c = 1120 \text{ м.} \end{cases}$$

Ответ: скорость первого 30 м/мин, второго — 40 м/мин, длина окружности равна 1120 м.

Задача 2. По окружности радиуса R в одинаковом направлении движутся две точки со скоростями v_1 и v_2 . Они начинают движение из диаметрально противоположных точек. Найдите расстояние между ними (не по окружности) через время t .

Будем определять расстояние между точками по теореме косинусов, вычислив предварительно угол между радиусами, проведенными к этим точкам.

Введем декартову систему координат (ДСК) с центром в центре окружности так, чтобы начальные координаты точек были $(-R; 0)$ и $(R; 0)$.

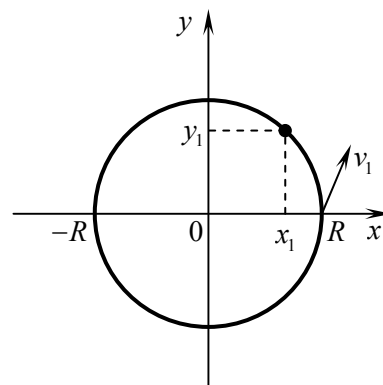
Через время t координаты точек будут.

1. За время t точка пройдет расстояние $v_1 t$ и сместится на угол $\frac{v_1 t}{R}$,

вторая точка — на угол $\frac{v_2 t}{R}$.

2. Решим систему

$$\begin{cases} x_1 = R \cos \frac{v_1 t}{R} \\ y_1 = R \sin \frac{v_1 t}{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = R \cos \left(\frac{v_2 t}{R} + \pi \right) \\ y_1 = R \sin \left(\frac{v_2 t}{R} + \pi \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -R \cos \frac{v_2 t}{R}, \\ y_1 = -R \sin \frac{v_2 t}{R}. \end{cases}$$



Таким образом,

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{R^2 \left(\cos \frac{v_1 t}{R} + \cos \frac{v_2 t}{R} \right)^2 + R^2 \left(\sin \frac{v_1 t}{R} + \sin \frac{v_2 t}{R} \right)^2} = \\ &= R \cdot \sqrt{\cos^2 \frac{v_1 t}{R} + 2 \cdot \cos \frac{v_1 t}{R} \cdot \cos \frac{v_2 t}{R} + \cos^2 \frac{v_2 t}{R} + \sin^2 \frac{v_1 t}{R} + 2 \cdot \sin \frac{v_1 t}{R} \cdot \sin \frac{v_2 t}{R} + \sin^2 \frac{v_2 t}{R}} = \\ &= R \cdot \sqrt{2 + 2 \cos \left(\frac{v_1 t}{R} - \frac{v_2 t}{R} \right)} = R \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \left(1 + \cos \left(\frac{v_1 t}{R} - \frac{v_2 t}{R} \right) \right)}{2}} = 2R \left| \cos \frac{(v_1 - v_2)t}{2R} \right|. \end{aligned}$$

Ответ: искомое расстояние равно $2R \left| \cos \frac{(v_1 - v_2)t}{2R} \right|$.

Примечание: в декартовой системе координат (ДСК) расстояние между точками с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ есть $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Примеры графических решений задач на движение

Задача 1. Расстояние между двумя колхозами — 12 километров. Колхозник вышел из своего колхоза в 9 часов 25 минут, а пришел в другой в 13 часов 15 минут. На следующий день он отправился в обратный путь в 11 часов и пришел к 14 часам 40 минутам. Укажите, на каком расстоянии от его колхоза находится пункт, который он проходил в одно и то же время как на прямом, так и на обратном пути.

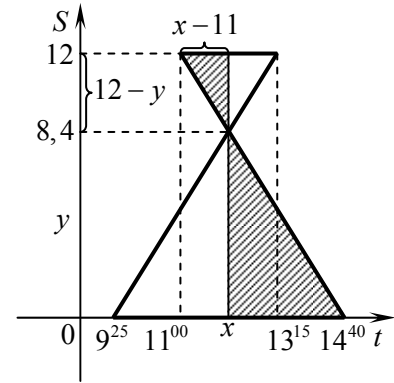
1. Так как нижний треугольник с основанием 5,25 подобен верхнему треугольнику с основанием 2,25, их высоты относятся как основания: $\frac{y}{12 - y} = \frac{5,25}{2,25} \Leftrightarrow y = 8,4$ км.

2. Заштрихованные треугольники подобны. Их высоты равны 8,4 и 3,6, а основания — $\frac{44}{3} - x$ и $x - 11$.

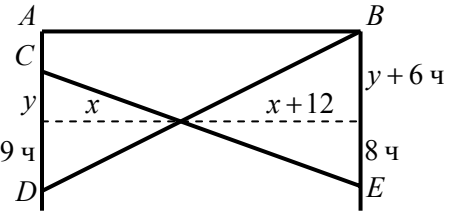
Решим уравнение

$$\frac{\frac{44}{3} - x}{x - 11} = \frac{8,4}{3,6} \Leftrightarrow x = 12,1 \text{ часа.}$$

Ответ: на расстоянии 8,4 километров.



Задача 2. Два пешехода идут навстречу друг другу, один из пункта A , другой из пункта B . Первый выходит из пункта A на 6 часов позже, чем второй из пункта B , и при встрече, оказывается, что он прошел на 12 километров меньше второго. Продолжая после встречи путь с той же скоростью, первый приходит в пункт B через 8 часов, а второй приходит в пункт A через 9 часов после встречи. Найдите их скорости.



Решим задачу графически (см. рисунок):

$$\begin{cases} \frac{y}{8} = \frac{9}{y+6} \\ \frac{y}{x} = \frac{8}{x+12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6, \\ \frac{6}{x} = \frac{8}{x+12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6, \\ x = 36. \end{cases}$$

Скорость первого пешехода — $x : y = 6$ км/ч, скорость второго пешехода — $(x + 12) : (y + 6) = 4$ км/ч.

Ответ: 6 км/ч, 4 км/ч.

Задача 4. Два туриста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B . При встрече оказалось, что первый приехал на 30 километров больше второго и через 4 дня будет в пункте B , а второй попадет в пункт A через 9 дней после встречи. Найдите $|AB|$.

1. Треугольники $O\xi B$ и OED подобны, тогда

$$\frac{y}{y+30} = \frac{B\xi}{ED} \Leftrightarrow \frac{y}{y+30} = \frac{B\xi}{9}.$$

Пусть $B\xi = x$. Тогда

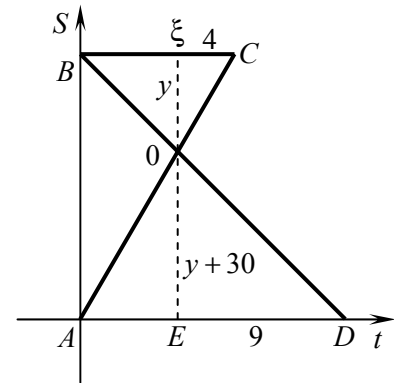
$$\frac{y}{y+30} = \frac{x}{9}.$$

2. Треугольники OBC и OAD подобны, тогда

$$\frac{y}{y+30} = \frac{x+4}{x+9}.$$

3. Решим систему

$$\begin{cases} \frac{y}{y+30} = \frac{x}{9} \\ \frac{y}{y+30} = \frac{x+4}{x+9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+4}{x+9} = \frac{x}{9} \\ \frac{y}{y+30} = \frac{x}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -9 \\ 9(x+4) = x(x+9) \\ \frac{y}{y+30} = \frac{x}{9} \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -9 \\ 9(x+4) = x(x+9) \\ \frac{y}{y+30} = \frac{x}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -9 \\ x^2 = 36 \\ \frac{y}{y+30} = \frac{x}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -9 \\ \begin{cases} x = -6 \\ x = 6 \end{cases} \\ \frac{y}{y+30} = \frac{x}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = 60. \end{cases}$$

4. Искомое расстояние (при $y = 60$ км.) равно $y + 30 + y = 150$ км.

Ответ: 150 километров.